空间向量-期中必做题

1 如图1，在边长为2的正方形$ABCD$中，P为CD中点，分别将$\triangle PAD$，$\triangle PBC$沿PA，PB所在直线折叠，使点C与点D重合于点O，如图2． 在三棱锥$P-OAB$中，E为PB的中点．

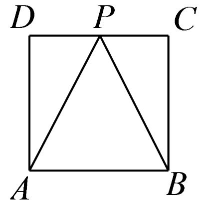


图1

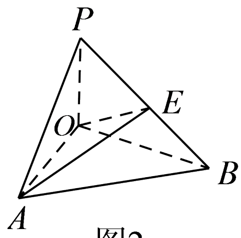


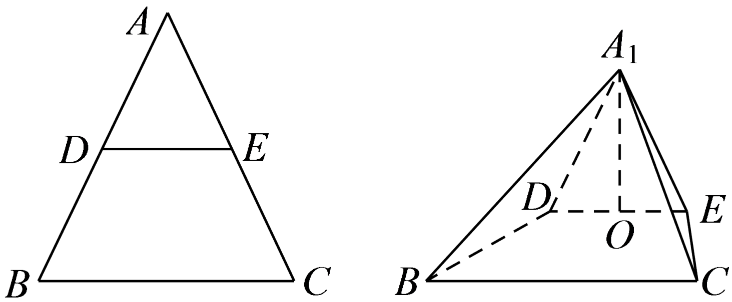
图2

（1）求证：$PO \perp AB$．

（2）求直线PB与平面POA所成角的正弦值．

（3）求二面角$P-AO-E$的大小．

2 如图1，在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，O为DE的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$．将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，使得平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，如图2．



（1）求证：$A_1O\perp BD$．

（2）求直线A_1C和平面A_1BD所成角的正弦值．

（3）线段A_1C上是否存在点F，使得直线DF和BC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$？若存在，求出$\frac{A_1F}{A_1C}$的值；若不存在，说明理由．

3 如图1，在矩形$ABCD$中，$AB=2,BC=4$，E为AD的中点，O为BE的中点．将$\triangle ABE$沿BE折起到$A'BE$，使得平面$A'BE\perp$平面$BCDE$（如图2）．

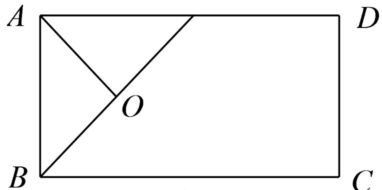


图1

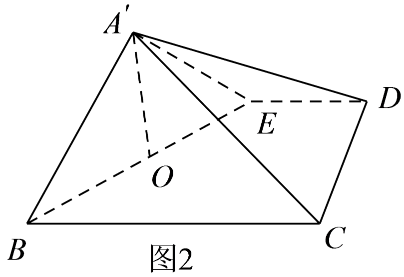


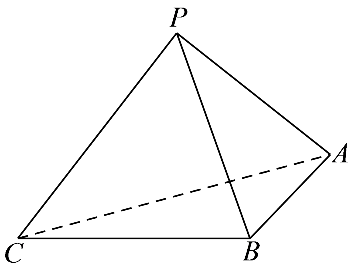
图2

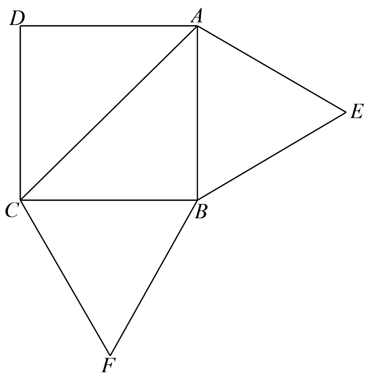
（1）求证:$A'O\perp CD$．

（2）求直线$A'C$与平面$A'DE$所成角的正弦值．

（3）在线段$A'C$上是否存在点P，使得$OP//$平面$A'DE$?若存在，求出$\dfrac{A'P}{A'C}$的值．若不存在，请说明理由．

4 已知三棱锥$P-ABC$（如图1）的平面展开图（如图2）中，四边形$ABCD$为边长为$\sqrt{2}$的正方形，$\triangle ABE$和$\triangle BCF$均为正三角形．在三棱锥$P-ABC$中：





（图1）

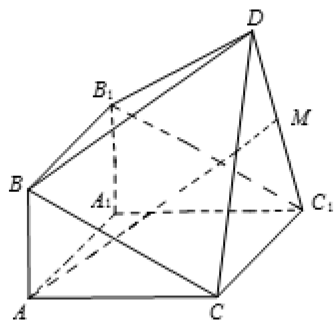
（图2）

（1）证明：平面$PAC\perp$平面ABC．

（2）求二面角$A-PC-B$的余弦值．

（3）若点M在棱PC上，满足$\dfrac{CM}{CP}=\lambda$，$\lambda=\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，点$N$在棱$BP$上，且$BM\perp AN$，$\dfrac{BN}{BP}$的取值范围．

5 如图，由直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$和四棱锥$D-BB_1CC_1$构成的几何体中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=1$，$BC=BB_1=2$，$C_1D=CD=\sqrt{5}$，平面$CC_1D\perp$平面ACC_1A_1．



（1）求证：$AC\perp DC_1$．

（2）若M为DC_1的中点，求证：$AM//$平面DBB_1．

（3）在线段BC上是否存在点P，使直线DP与平面BB_1D所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$？若存在，求$\dfrac{BP}{BC}$的值，若不存在，说明理由．

6 如图1，四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD$，面$ABCD$是直角梯形，M为侧棱PD上一点．该四棱锥的俯视图和侧（左）视图如图2所示．

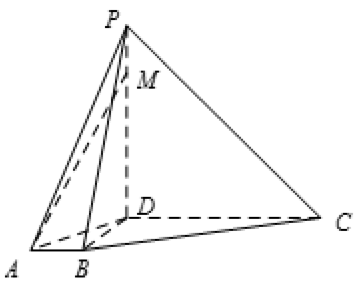


图1

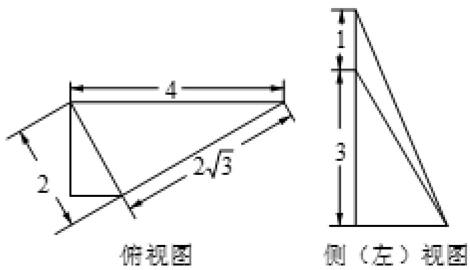


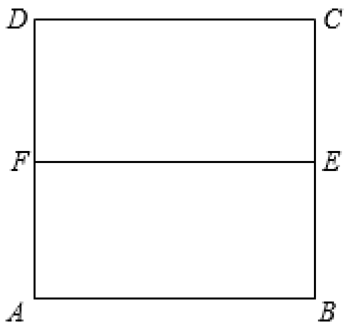
图2

（1）证明：$BC\perp$平面PBD．

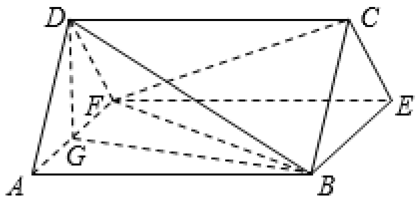
（2）证明：$AM//$平面PBC．

（3）线段CD上是否存在点N，使AM与BN所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$？若存在，找到所有符合要求的点N，并求CN的长；若不存在，说明理由．

7 如图，正方形$ABCD$的边长为4，E，F分别为BC，DA的中点．将正方形$ABCD$沿着线段EF折起，使得$\angle DFA=60^\circ$．设G为AF的中点．



$\Rightarrow$

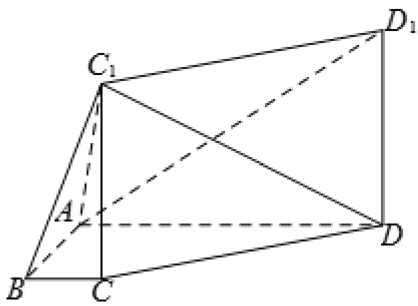


（1）求证：$DG\perp EF$；

（2）求直线GA与平面BCF所成角的正弦值；

（3）设P，Q分别为线段DG，CF上一点，且$PQ//$平面$ABEF$，求线段PQ长度的最小值．

8 如图，四边形为梯形$ABCD$，$AD//BC$，$\angle BAD=90^\circ$，四边形CC_1D_1D为矩形，已知$AB\perp BC_1$，$AD=4$，$AB=2$，$BC=1$．

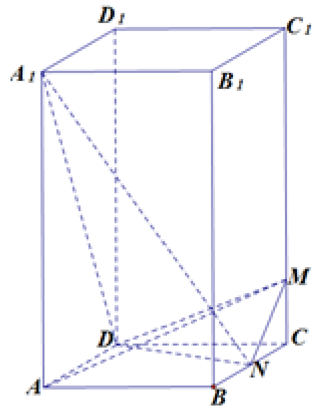


（1）求证：$BC_1//$平面ADD_1；

（2）若$DD_1=2$，求平面AC_1D_1与平面ADD_1所成的锐二面角的余弦值；

（3）设P为线段C_1D上的一个动点（端点除外），判断直线BC_1与直线CP能否垂直？并说明理由．

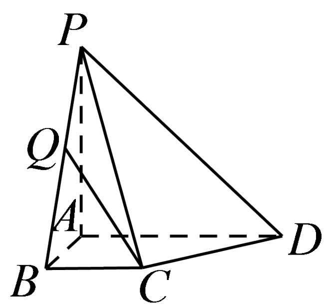
9 如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=2, AB=1$，点N是BC的中点，点M在CC_1上，设二面角A_1-DN-M的大小为θ．



（1）当$\theta=90^0$时，求AM的长；

（2）当$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$时，求$CM$的长．

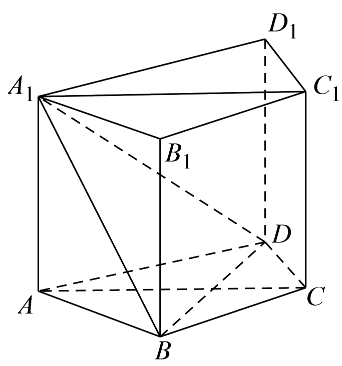
10 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，已知$PA\perp$平面$ABCD$，且四边形$ABCD$为直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$PA=AD=2$，$AB=BC=1$．



（1）求平面PAB与平面PCD所成二面角的余弦值．

（2）点Q是线段BP上的动点，当直线CQ与DP所成角最小时，求线段BQ的长．

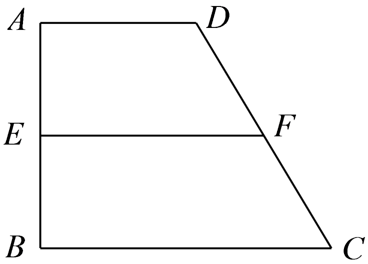
11 如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=BD$，$BC=CD$．

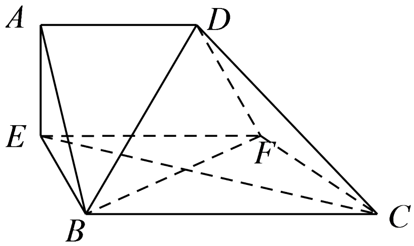


（1）求证：平面$ACC_1A_1\perp$平面A_1BD．

（2）当$BC\perp CD$时，直线BC与平面A_1BD所成的角能否为45°？并说明理由．

12 如图在直角梯形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB\perp BC$，且$BC=2AD=4$，E,F分别为线段AB,DC的中点，沿EF把$AEFD$折起，使$AE\perp CF$，得到如下的立体图形．





（1）证明：平面$AEFD\perp$平面$EBCF$．

（2）若$BD\perp EC$，求二面角$F-BD-C$的余弦值．

13 如图1，在边长为$2\sqrt{3}$的正方形$ABCD$中，E,O分别为AD,BC的中点，沿EO将矩形$ABOE$折起使得$\angle BOC=120^\circ$，如图2所示，点G在BC上，$BG=2GC$，M,N分别为AB,EG中点．

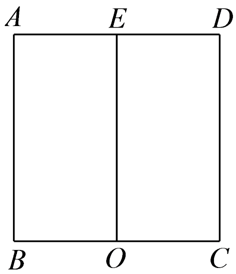


图1

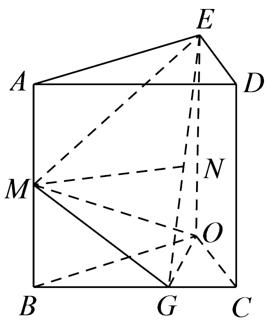


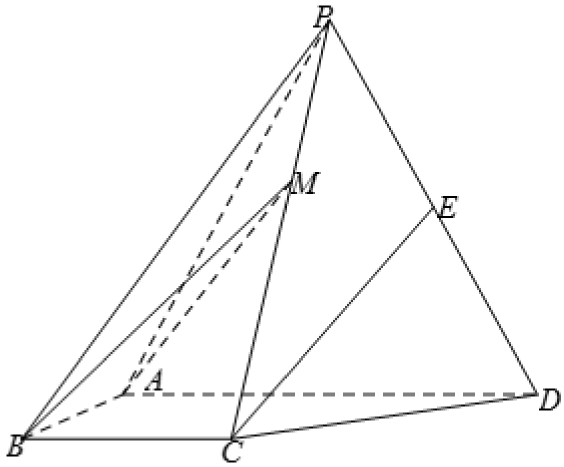
图2

（1）求证：$MN//$平面OBC．

（2）求二面角$G-ME-B$的余弦值．

14 如图，四棱锥$P-ABCD$中，侧面PAD为等边三角形且垂直于底面三角形BCD，

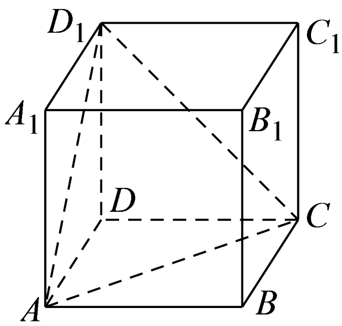
$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，$E$是$PD$的中点．



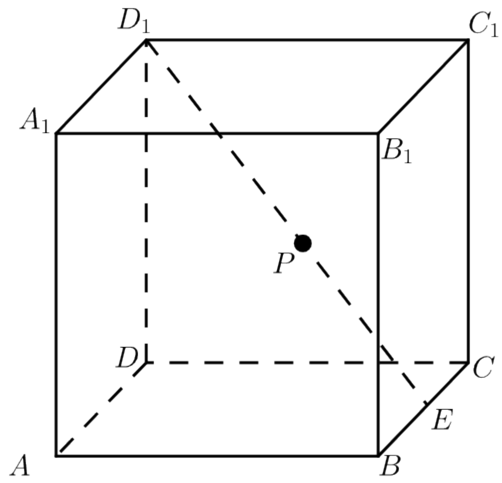
（1）证明：直线$CE//$平面PAB．

（2）点M在棱PC上，且直线BM与底面$ABCD$所成锐角为$45°$，求二面角$M-AB-D$的余弦值．

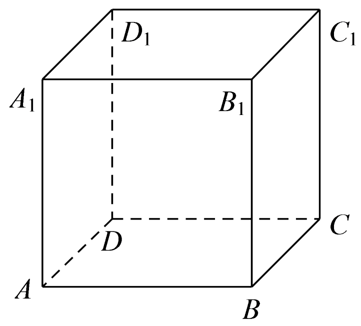
15 在如图所示的棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，作与平面ACD_1平行的截面，则截得的三角形中，面积最大的值是 ______ ；截得的平面图形中，面积最大的值是 ______ ．



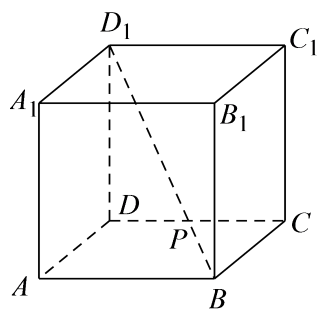
16 如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为BC的中点，点P在线段D_1E上．点P到直线CC_1的距离的最小值为 ______ ．



17 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB=2$，$BC=1$，点P在侧面A_1ABB_1上．若点P到直线AA_1和CD的距离相等，则A_1P的最小值是______ ．



18 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为对角线BD_1的三等分点，P到各顶点的距离的不同取值有（　）．



A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

19

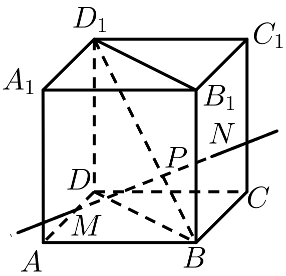
在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P是正方体棱上一点（不包括棱的端点），

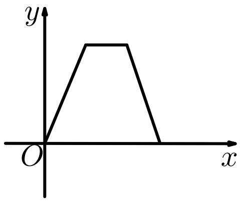
$|PA|+|PC_1|=m$，

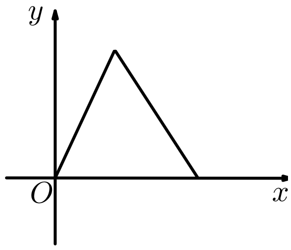
（1）若$m=2$，则满足条件的点P的个数为 ______ ．

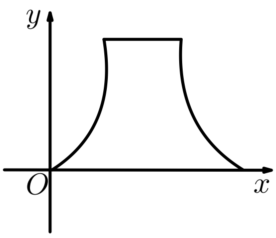
（2）若满足$|PA|+|PC_1|=m$的点P的个数为6，则m的取值范围是 ______ ．

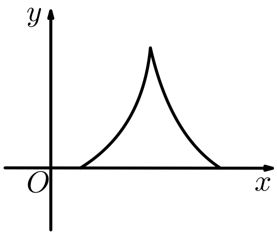
20 如图，动点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的对角线BD_1上．过点P作垂直于平面BB_1D_1D的直线，与正方体表面相交于M，N．设$BP=x$，$MN=y$，则函数$y=f(x)$的图象大致是（　）．



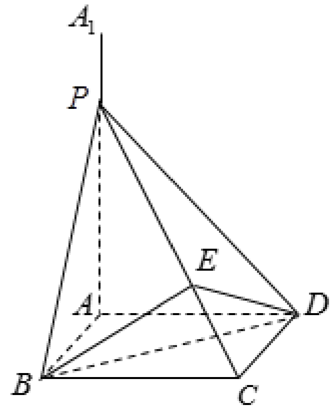
A.


B.


C.


D.


21 已知四边形$ABCD$是边长为1的正方形，且$A_1A\perp$平面$ABCD$，P为A_1A上动点，过BD且垂直于PC的平面交PC于E，那么异面直线PC与BD所成的角的度数为 ______ ，当三棱锥$E-BCD$的体积取得最大值时，四棱锥$P-ABCD$的高PA的长为 ______ ．



22 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱DD_1，AB上的点．已知下列判断：

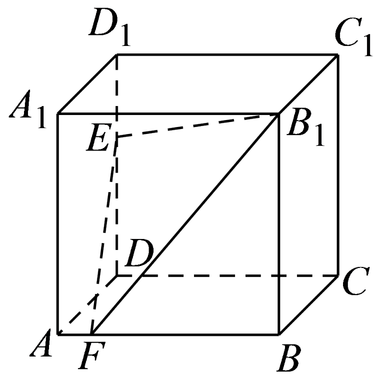
①$A_1C\perp$平面B_1EF；

②$\triangle B_1EF$在侧面BCC_1B_1上的正投影是面积为定值的三角形；

③在平面$A_1B_1C_1D_1$内总存在与平面B_1EF平行的直线；

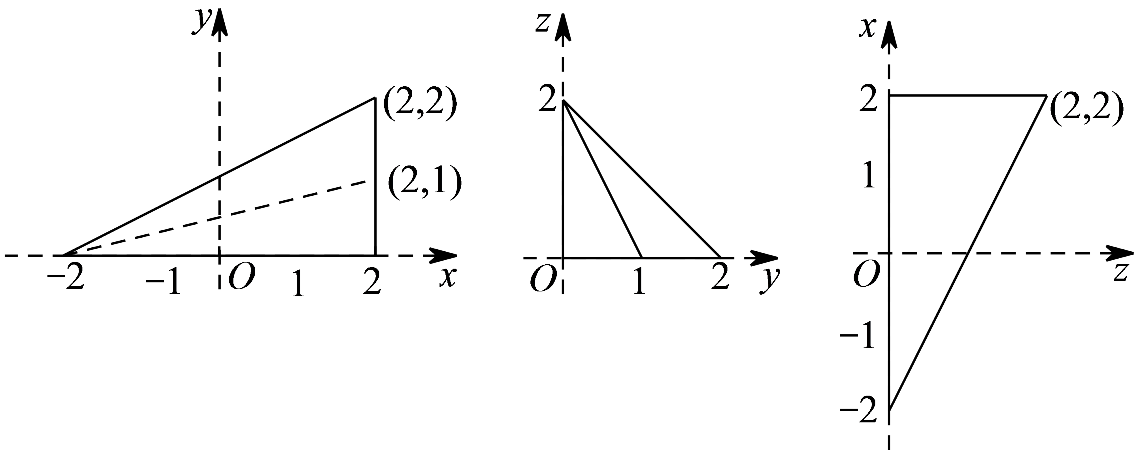
④平面B_1EF与平面$ABCD$所成的二面角（锐角）的大小与点E的位置有关，与点F的位置无关．

其中正确判断的个数有（　）．



A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

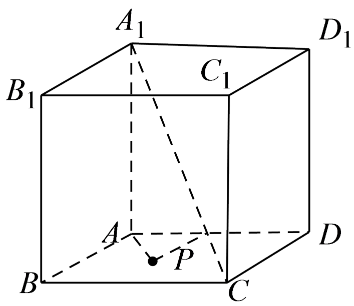
23 在空间直角坐标系$O-xyz$中，四面体$A-BCD$在xOy，yOz，zOx坐标平面上的一组正投影图像如图所示（坐标轴用细虚线表示）．该四面体的体积是______．



24 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=AA_1=1$，点M为AB_1的中点，点P为对角线AC_1上的动点，点Q为底面$ABCD$上的动点，（点PQ可以重合），则$MP+PQ$的最小值为（　　）．

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

25 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为底面$ABCD$上的动点，$PE\perp A_1C$于E，且$PA=PE$，则点P的轨迹是（　　）．

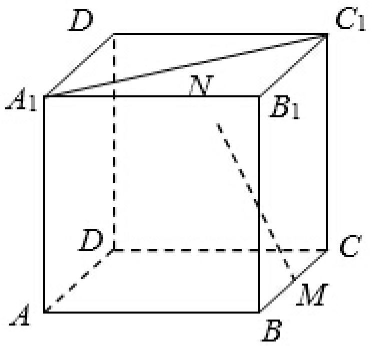


A. 线段　　B. 圆弧　　C. 椭圆的一部分　　D. 抛物线的一部分

26 已知正方体$ABCD-A'B'C'D'$，记过点A与三条直线AB，AD，AA'所成角都相等的直线条数为m，过点A与三个平面AC，AB'，AD'所成角都相等的直线的条数为n，则下面结论正确的是（　　）．

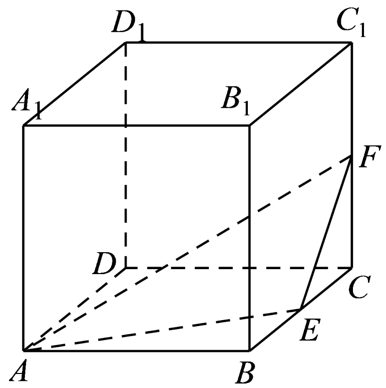
A. $m=1$，$n=1$　　B. $m=4$，$n=1$　　C. $m=3$，$n=4$　　D. $m=4$，$n=4$

27 如图，在正方体中$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M为BC的中点，点N在四边形CDD_1C_1及其内部运动．若$MN\perp A_1C_1$，则N点的轨迹为（　）．



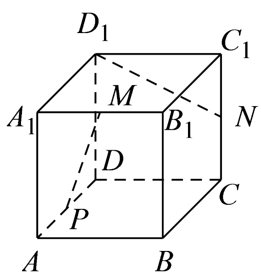
A. 线段　　B. 圆的一部分　　C. 椭圆的一部分　　D. 双曲线的一部分

28 如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别是棱BC,CC_1的中点，P是侧面BCC_1B_1 内一点，若$A_1P//$平面AEF, 则线段A_1P长度的取值范围是（　）．



A. $[1,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　B. $[\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　C. $[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　D. $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

29 如图所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M、N分别为A_1B_1，CC_1的中点，P为AD上一动点，记α为异面直线PM与D_1N所成的角，则$\sin\alpha$的值为（　）．



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

30 设P，Q为一个正方体表面上的两点，已知此正方体绕着直线PQ旋转$\theta(0<\theta<2\pi)$后能与自身重合，那么符合条件的直线PQ有 ______ 条．