

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

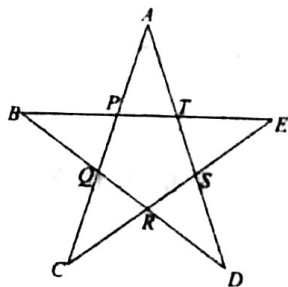
高三第一次联合诊断检测 数学

数学测试卷共 4 页。满分 150 分。考试时间 120 分钟。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x | x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | -2 < x \leq 4\}$ B. $\{x | -1 < x < 2\}$ C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | -1 \leq x < 2\}$
2. 设复数 z 满足 $z(1-i) = 2i$, 则 z 在复平面内对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 命题 $p: \forall x \in \mathbf{N}, |x+2| \geq 3$ 的否定为
 A. $\forall x \in \mathbf{N}, |x+2| < 3$ B. $\forall x \notin \mathbf{N}, |x+2| < 3$
 C. $\exists x \in \mathbf{N}, |x+2| \geq 3$ D. $\exists x \in \mathbf{N}, |x+2| < 3$
4. 为打赢新冠肺炎疫情阻击战, 防止境外输入病例, 中国国际航空公司在重庆江北机场设定了 3 个国际航班定点隔离酒店, 重庆某医院呼吸科从 5 名男医生和 3 名女医生中选派 3 人前往 3 个隔离酒店进行核酸检测采样工作, 则选派的 3 名医生中至少有 1 名女医生的概率是
 A. $\frac{23}{28}$ B. $\frac{5}{14}$ C. $\frac{15}{56}$ D. $\frac{2}{7}$
5. 直线 $y = x + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$
 A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. 6 D. $2\sqrt{7}$
6. 已知 $a, b > 0$, $ab = a + b + 8$, 则 ab 的最小值为
 A. 4 B. 8 C. 12 D. 16
7. 庄严美丽的国旗和国徽上的五角星是革命和光明的象征. 五角星是一个非常优美的几何图形, 且与黄金分割有着密切的联系. 在如图所示的五角星中, 以 A, B, C, D, E 为顶点的多边形为正五边形, 且 $\frac{|\overline{PT}|}{|\overline{AT}|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若 $\overline{ES} - \overline{AP} = \lambda \overline{BQ}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda =$

- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- C. $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- D. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$



8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(x) = f(-x)$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 2x$, 则关于 x 的不等式 $f(2-x) - f(x) > 4 - 4x$ 的解集为

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1)$ D. $(-1, 1)$

二、选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分)

9. 下表是某生活超市 2020 年第四季度各区域营业收入占比和净利润占比统计表:

	生鲜区	熟食区	乳制品区	日用品区	其它类
营业收入占比	48.6%	15.8%	20.1%	10.8%	4.7%
净利润占比	65.8%	-4.3%	16.5%	20.2%	1.8%

该生活超市本季度的总营业利润率为 32.5% (营业利润率是净利润占营业收入的百分比), 则

- A. 本季度此生活超市营业收入最低的是熟食区
B. 本季度此生活超市的营业净利润超过一半来自生鲜区
C. 本季度此生活超市营业利润率最高的是日用品区
D. 本季度此生活超市生鲜区的营业利润率超过 50%
10. 已知函数 $f(x) = |\cos x| + \cos |x|$, 则下列结论正确的是
- A. $f(x)$ 是周期函数 B. $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减
C. $f(x)$ 是奇函数 D. $f'(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称
11. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $b > 0$, 若 $c^a = \ln b = \frac{1}{c}$, 则 a, b, c 的大小关系可以是
- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 和各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 满足: $\sum_{i=1}^n (a_i + i) = 2b_n - 2$, $b_1 = 2$, $b_2 + b_3$ 是 b_3 与 b_4 的等差中项, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列结论正确的是
- A. 数列 $\{a_n - b_n\}$ 是等差数列
B. $S_n = 2^{n+1} - 2 - \frac{n(n+1)}{2}$
C. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列
D. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} < 2(1 - \frac{1}{b_n})$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若直线 $2x + y + 4 = 0$ 经过抛物线 $y^2 = ax$ 的焦点，则实数 $a =$ _____.

14. $(x - \frac{2}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中 x 的系数为_____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $b = 2$ ， $c = 3$ ， $A = 2B$ ，则 $a =$ _____.

16. 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = 4$ ， $BC = CD = DA = AA_1 = 2$ ，以 CD 中点 O 为球心、 OD_1 为半径的球 O 截侧面 ABB_1A_1 所得图形的面积为_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，有下列四个条件：

① $a = 4$ ；② $\triangle ABC$ 的面积是 $2\sqrt{7}$ ；③ $2a^2 + 3bc = 2c^2 + 2b^2$ ；④ $\frac{b}{c} = 2$ 或 $\frac{1}{2}$.

请选择其中三个作为条件，余下一个作为结论，写出一个“若_____，则_____”形式的命题（用序号填写即可），判断该命题的真假并说明理由.

18. (12 分)

已知向量 $a = (\sin x, \cos x)$ ， $b = (\cos(x + \frac{\pi}{6}) + \sin x, \cos x)$ ，函数 $f(x) = a \cdot b$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$ ，求 $f(\alpha)$.

19. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_4 = a_9$ ， $a_6 = 2a_3 + 1$.

(1) 求 a_n ；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{S_n + n}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，试比较 T_n 与 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的大小，并说明理由.

20. (12 分)

2020 年 11 月 16 日召开的经济形势专家和企业家座谈会全面分析了当前经济形势，并指出“注重开拓下沉市场特别是县乡市场，满足量大面广的基层需求，提升民生品质”等发展方向。某生产企业积极响应号召，决定将一批刚研发的新产品投入到县乡市场，为了解产品的销售量 y （单位：件）与售价 x （单位：元/件）之间的关系，现对该产品进行试销，得到售价 x_i 和销售量 y_i ($i=1, 2, \dots, 6$) 的对应数据如下表所示。

售价 x (元/件)	4	5	6	7	8	9
销售量 y (件)	90	84	83	80	75	68

(1) 若 y 与 x 之间具有线性相关关系，求 y 关于 x 的回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ；

(2) 若该产品每件成本为 5 元，试依据 (1) 中的回归方程，确定产品售价为多少元/件时，企业可获得最大利润？（结果取整数）

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + (a+1)x + \frac{1}{x}$, $a \in \mathbb{Z}$.

(1) 当 $a = -1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上无零点，求 a 的最小值.

22. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的四个顶点所围成的菱形边长为 2，面积为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过椭圆 C 的下顶点作两条斜率之和为 2 的直线 l_1, l_2 ，直线 l_1, l_2 与椭圆 C 的另一交点分别为 M, N ，求点 $A(-1, 0)$ 到直线 MN 的距离的最大值.