专题一　集合与常用逻辑用语

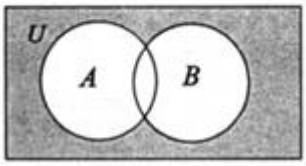
集合

一、单项选择题

1.（2021 潍坊三模 1）已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，则集合 $\{5\}=$（　　）

A. $C_U(A\cup B)$　　B. $(C_UA)\cup(C_UB)$　　C. $(C_UA)\cup B$　　D. $(C_UB)\cup A$

2.（2021 滨州二模 1）设全集 $U=\{-3，-2，0，2，3\}$，$A=\{-3，3\}$，$B=\{x|(x-3)(x-2)=0\}$，则图中阴影部分所表示的集合为（　　）



A. $\{-3，2，3\}$　　B. $\{-3，-2，0，2\}$

C. $\{3\}$　　D. $\{-2，0\}$

3.（2021 菏泽二模 1）已知集合 $A=\{x\in Z|x^2-x-2\geq 0\}$，则` $C_ZA=$（　　）

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$　　*C.* $\{0，1\}$　　*D.* $\{-1，0，1\}$

4.（2021 烟台适应性练习二 1）已知集合 $A=\{-1，0，1，2，3\}$，$B=\{x|y=ln(4-x^2)\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0，1\}$　　B. $\{-1，1\}$　　C. $\{-1，0，1\}$　　D. $\{-1，0，1，2\}$

5.（2021 潍坊四县 5 月联考 1）已知集合 $A=\{x\in N|x^2-x-6<0\}$，以下可为 A 的子集的是（　　）

A. $\{x|-2<x<3\}$　　B. $\{x|0<x<3\}$　　C. $\{0，1，2\}$　　D. $\{-1，1，2\}$

6.（2021 日照二模 1）设集合 $A=\{x|(x+1)(x-4)<0\}$，$B=\{x|0<x<9\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(0，4)$　　B. $(4，9)$　　C. $(-1，4)$　　D. $(-1，9)$

7.（2021 省实验中学二模 1）已知集合 $A=\{x|-5<x<1\}$，$B=\{x|x^2\leq 4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(2，3)$　　B. $[2，3)$　　C. $[-2，1)$　　D. $(-2，1)$

8.（2021 烟台三模 1）已知集合 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|x<2\}$，则 $A\cap C_RB=$（　　）

A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$　　C. $\{x|2\leq x<3\}$　　D. $\{x|x>3\}$

9.（2021 淄博二模 1）已知集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|y=\sqrt{x}\}$，那么 $A\cup C_RB=$（　）.

A. $(-2,1)$　　B. $(-2,0)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,0)$

10.（2021 德州二模 2）已知集合 $A=\{x|-2<1-x<3\}$，$B=\{x\in N|x^2\leq 6x\}$，则 $(C_RA)\cap B=$（　　）.

A. $(3,6]$　　B. $(2,6]$　　C. $\{3,4,5,6\}$　　D. $\{4,5,6\}$

11.（2021 泰安二模 1）设 $A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|x^2-x-2<0\}$，则 $(\complement_RA)\cap B=$（　　）

A．$\{x|x>-1\}$　　B．$\{x|-1<x\leqslant 1\}$　　C．$\{x|-1<x<1\}$　　D．$\{x|1<x<2\}$

12.（2021 日照三模 1）已知集合 $A=\{x|2^x<4\}$，$B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$[-1,2)$　　B．$(2,3]$　　C．$(-1,3]$　　D．$(-\infty,3]$

13.（2021 聊城二模 1）已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x^2\geqslant 1\}$，$B=\{x|\ln x\geqslant 0\}$，则（　　）

A．$A\cup B=B$　　B．$A\cap B=A$　　C．$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$　　D．$\complement_U B\subseteq \complement_U A$

14.（2021 济宁二模 1）已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x\geq 2\}$，$B=\{x|\log_2(x-1)<1\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(-\infty,2]$　　C．$(1,2)$　　D．$(1,3)$

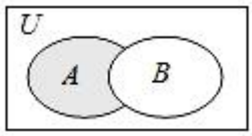
15.（2021 枣庄二模 1）已知集合 $A=\{x|y=\ln x\}$，$B=\{y\in Z|y=2\sin x\}$，则 $A\cap B=$

A．$(0,2]$　　B．$[0,2]$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,1,2\}$

16.（2021 烟台适应性练习一 1）已知集合 M，N 都是 R 的子集，且 $M\cap \complement_R N=\varnothing$，则 $M\cap N=$（　　）

A．M　　B．N　　C．$\varnothing$　　D．R

17.（2021 淄博三模 1）已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|1-\frac{2}{x}<0\}$，$B=\{x||x|\leqslant 1\}$，则如图阴影部分表示的集合是（　　）



A．$[-1,0)$　　B．$[-1,0)\cup[1,2)$

C．$(1,2)$　　D．$(0,1)$

18.（2021 青岛二模 1）已知 A，B 均为 R 的子集，且 $A\cap(\complement_R B)=A$，则下面选项中一定成立的是（　　）

A．$B\subseteq A$　　B．$A\cup B=R$　　C．$A\cap B=\varnothing$　　D．$A=\complement_R B$

19.（2021 临沂二模 1）若集合 A，B，U 满足 $A\cap \complement_U B=\varnothing$，则下面选项中一定成立的是（　　）

A．$B\subseteq A$　　B．$A\cup B=U$　　C．$A\cup \complement_U B=U$　　D．$B\cup \complement_U A=U$

20.（2021 青岛三模 1）集合 $A=\{x\in N|y=\log_4(x^3-8)\}$，集合 $B=\{y\in N|y=2^{|x-1|},x\in R\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$（　　）

A．$(0,2]$　　B．$(-1,2]$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2\}$

21.（2021 聊城三模 1）已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,a^2+3\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则实数 a 的值为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

22.（2021 潍坊二模 3）已知集合 $A=\{0\}$，$B=\{x|x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是（　　）

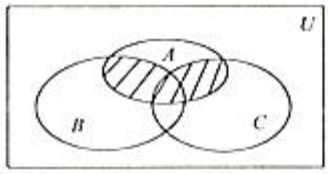
A．$(-\infty,0)$　　B．$(-\infty,0]$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$[0,+\infty)$

二、多项选择题

23.（2021 济南二模 9）图中阴影部分用集合符号可以表示为（　　）

A．$A\cap(B\cup C)$　　B．$A\cup(B\cap C)$

C．$A\cap\complement_U(B\cap C)$　　D．$(A\cap B)\cup(A\cap C)$



常用逻辑用语

24.（2021 枣庄二模 2）命题“$\forall n\in N$，$n^2-1\in Q$”的否定为

A．$\forall n\in N$，$n^2-1\notin Q$　　B．$\forall n\notin N$，$n^2-1\in Q$

C．$\exists n\in N$，$n^2-1\notin Q$　　D．$\exists n\in N$，$n^2-1\in Q$

25.（2021 德州二模 1）已知命题 $p:\forall x>0$，$\ln(x+1)>0$，则 $\neg p$ 为（　　）.

A．$\forall x>0$，$\ln(x+1)\le 0$　　B．$\exists x_0>0$，$\ln(x_0+1)\le 0$

C．$\forall x<0$，$\ln(x+1)\le 0$　　D．$\exists x_0\le 0$，$\ln(x_0+1)\le 0$

26.（2021 临沂二模 3）“$x>1$”是“$2^x+\frac{2}{2^x}>3$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

27.（2021 济宁二模 3）“直线 m 垂直平面 α 内的无数条直线”是“$m\perp\alpha$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必安条件

28.（2021 烟台适应性练习一 4）若 l，m 是两条不同的直线，α 是一个平面，$l\perp\alpha$，则“$l\perp m$”是“$m/\!/\alpha$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

29.（2021 日照三模 4）若 l，m 是平面 α 外的两条不同直线，且 $m/\!/\alpha$，则“$l/\!/m$”是“$l/\!/\alpha$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

30.（2021 潍坊三模 5）“$\tan\alpha=2$”是“$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{5}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

31.（2021 聊城三模 4）已知直线 $l:(a-1)x+y-3=0$ ，圆 $C:(x-1)^2+y^2=5$ ．则“ $a=-1$ ”是“ l 与 C 相切”的（　　）

A.　必要不充分条件　　B.　充分不必要条件

C.　充要条件　　D.　既不充分也不必要条件

32.（2021 淄博二模 7）已知 a ， b 为正实数，则“ $\frac{ab}{a+b}\leq 2$ ”是“ $ab\leq 16$ ”的（　　）.

A.　充要条件　　B.　必要不充分条件

C.　充分不必要条件　　D.　既不充分也不必要条件

二、多项选择题

33.（2021 烟台适应性练习一 12）若非空集合 G 和 G 上的二元运算“⊕”满足：

①$\forall a$，$b\in G$，$a\oplus b\in G$;

②$\exists I\in G$，对$\forall a\in G$，$a\oplus I=I\oplus a=a$;

③$\exists I\in G$，使$\forall a\in G$，$\exists b\in G$，有 $a\oplus b=I=b\oplus a$;

④$\forall a$，b，$c\in G$，$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$，

则称（G，⊕）构成一个群.

下列选项对应的（G，⊕）构成一个群的是（　　）

A．集合 G 为自然数集，“⊕”为整数的加法运算

B．集合 G 为正有理数集，“⊕”为有理数的乘法运算

C．集合 $G=\{-1，1，-i，i\}$（i 为虚数单位），“⊕”为复数的乘法运算

D．集合 $G=\{0，1，2，3，4，5，6\}$，“⊕”为求两整数之和被 7 除的余数

专题二　复数

一、单项选择题

1.（2021 济宁二模 2）已知 $(2-i)\cdot z=i$ ， i 为虚数单位，则 $|z|=$ （　　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

2.（2021 泰安二模 2）若复数 z 满足（3+4i）$z=|4-3i|$，则 z 的虚部为（　　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. －4　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. 4

3.（2021 省实验中学二模 2）已知复数 $z=(a-3i)(3+2i)$（$a\in R$）的实部与虚部的和为 7，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. －2

4.（2021 日照二模 2）若复数 z 满足 $iz=2+3i$，则 z 的实部与虚部之和为（　　）

A. －1　　B. 1　　C. －2　　D. 3

5.（2021 潍坊三模 2）设复数 z_1， z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称， $z_1=2+i$， 则 $z_1z_2=$

A. － 5　　B. 5　　C. － 4+ i　　D. － 4 － i

6.（2021 青岛三模 2）$z(1+i)=2i$（i 为虚数单位），则复数 z 对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

7.（2021 潍坊四县 5 月联考 2）已知复数 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$（$i$ 为虚数单位），则 $|\overline{z}-1|=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

8.（2021 菏泽二模 2）若复数 $z=1-i$，则 $|z^2-2z|$ =(　　)

A. 0　　*B.* 2　　*C.* 4　　*D.* 6

9.（2021 滨州二模 2）设 i 为虚数单位，则复数 $z=\frac{|2-\sqrt{5}i|}{1+i}$ 的虚部为（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $-\frac{9}{2}$

10.（2021 济南二模 1）设复数 $z=\frac{2i}{1+i}$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 在复平面内对应的点所在的象限为（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

11.（2021 淄博二模 2）若复数 $\bar{z}=\frac{1-2i}{i}$ （ i 为虚数单位），则 $|z|=$ （　　　）.

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

12.（2021 烟台适应性练习一 2）已知复数 $z=\frac{2}{1-i}$，则$\bar{z}$在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

13.（2021 烟台三模 2）若复数 $z=\frac{1}{2}-\cos\theta+i\sin\theta$ 表示的点在第三象限，则θ的取值范围为（　　）

A．$\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$　　B．$\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$

C．$\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$　　D．$\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$

14.（2021 烟台适应性练习二 2）已知复数 z 满足$|z-1-i|\leqslant1$，则$|z|$的最小值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{2}+1$

15.（2021 日照三模 3）在复平面内，复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 对应向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$，则向量$\overrightarrow{AB}$对应的复数是（　　）

A．$-1+9i$　　B．$9+i$　　C．$-9-i$　　D．$9-i$

16.（2021 聊城二模 2）已知复数 $z_1=-2+i$，$z_2=\frac{z_1}{i}$，在复平面内，复数 z_1 和 z_2 所对应的两点之间的距离是（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．5　　D．10

17.（2021 聊城三模 2）已知 $a\in R$，i 为虚数单位，若 $\frac{a-3i}{2+4i}$ 为实数，则 a 的值为（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{3}{2}$

18.（2021 枣庄二模 5）大数学家欧拉发现了一个公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，i 是虚数单位，e 为自然对数的底数．此公式被誉为“数学中的天桥”．根据此公式，$(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{2022}=$

（注：底数是正实数的实数指数幂的运算律适用于复数指数幂的运算）

A．1　　B．－1　　C．i　　D．－i

19.（2021 潍坊二模 2）在复数范围内，已知 p，q 为实数，$1-i$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根，则 $p+q=$（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．－1

20.（2021 淄博三模 5）已知 $z\in C$，且$|z-i|=1$，i 为虚数单位，则$|z-1|$的最大值是（　　）

A．2　　B．$\sqrt{2}+1$　　C．$\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{2}$

二、多项选择题

21.（2021 青岛二模 9）已知复数$z=\sqrt{3}+i$（i 为虚数单位），$\overline{z}$为 z 的共轭复数，若复数$z_0=\frac{\overline{z}}{z}$，则下列结论正确的是（　　）

A．z_0在复平面内对应的点位于第四象限　　B．$|z_0|=1$

C．z_0的实部为$\frac{1}{2}$　　D．z_0的虚部为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

22.（2021 德州二模 9）已知复数 $z_1=\frac{2}{-1+i}$ （ i 为虚数单位），下列说法正确的是（　　　）.

A.　z_1 对应的点在第三象限

B.　z_1 的虚部为 -1

C.　$z_1^4=4$

D.　满足 $|z|=|z_1|$ 的复数 z 对应的点在以原点为圆心，半径为 2 的圆上

23.（2021 临沂二模 10）1487 年，瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写下公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，这个公式在复变函数中有非常重要的地位，即著名的“欧拉公式”，被誉为“数学中的天桥”，据欧拉公式，则（　　）

A．$e^{\frac{\pi i}{2}}=i$　　B．$|e^{\frac{\pi i}{4}}|=1$

C．$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$　　D．$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}+e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2}$

专题三　三角函数与解三角形

一、单项选择题

1.（2021 潍坊二模 1）sin20° sin10° - cos20° cos10° ＝（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.（2021 日照二模 3）若 α 为第二象限角，则（　　）

A. sinα - cosα ＜0　　B. tanα ＜0

C. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)>0$　　D. cos（π - 2α）＞0

3.（2021 济南二模 3）△ABC 中，“$\sin A=\frac{1}{2}$”是“$A=\frac{\pi}{6}$”的（　　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4.（2021 淄博二模 6）若 $\tan\alpha>\sin\alpha>\sin2\alpha(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$，则 $\alpha\in$（　　　）.

A. $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6})$　　B. $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$　　C. $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$　　D. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$

5.（2021 济南二模 5）将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位后，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列关于 $g(x)$ 的说法正确的是（　　）

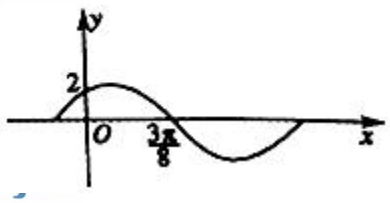
A. 最小正周期为 π　　B. 最小值为 - 1

C. 图象关于点（$\frac{3\pi}{2}$，0）中心对称　　D. 图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称

6.（2021 聊城二模 5）已知函数 $f(x)=2\sqrt{2}\sin(\omega x+\phi)$（$\omega>0$，$|\phi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向右平移 a（$a>0$）个单位后，得到函数 $g(x)$ 的图象，若对于任意的 $x\in R$，$g(x)\leqslant|g(\frac{\pi}{24})|$，则 a 的值可以为（　　）

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{5\pi}{12}$　　D. $\frac{\pi}{2}$



7.（2021 青岛三模 7）若将函数 $f(x)=2\sin(2x+\phi)$（$|\phi|<\frac{\pi}{2}$）的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位后得到的图象关于 y 轴对称，则函数 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.（2021 菏泽二模 5）已知函数$f(x)=sin(x+\frac{\pi}{3})\cos x-\frac{\sqrt{3}}{4}$的图像向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再将图像上所有点的横坐标缩小到原来的一半，纵坐标不变，得到函数 g（x）的图象，若$g(x_1)\cdot g(x_2)=\frac{1}{4}(x_1\neq x_2)$，则$|x_1-x_2|$的最小值为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

9.（2021 淄博三模 6）已知锐角 α，β 满足$\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，则$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$的最小值为（　　）

A．4　　B．$4\sqrt{3}$　　C．8　　D．$8\sqrt{3}$

10.（2021 潍坊二模 7）已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，若函数 $g(x)=f(x)-a$（$a\in R$）在 $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$上恰有三个零点 x_1，x_2，x_3（$x_1<x_2<x_3$），则 x_3-x_1的值是（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．π　　D．2π

二、多项选择题

11.（2021 烟台适应性练习一 9）设函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，则（　　）

A．$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增

B．$x=\frac{\pi}{6}$为 $f(x)$图象的一条对称轴

C．$(-\frac{\pi}{6},0)$为 $f(x)$图象的一个对称中心

D．$y=2\cos x$ 的图象可由 $f(x)$图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到

12.（2021 烟台三模 9）若函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$两条对称轴之间的最小距离为$\frac{\pi}{2}$，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$的最小正周期为π

B. 函数 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减

C. 将函数 $f(x)$图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后所得图象关于 y 轴对称

D. 若 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 $f(x_1+x_2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

13．（2021 临沂二模 9）设函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象为曲线 E，则（　　）

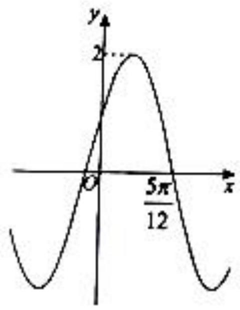
A．将曲线 $y=\cos 2x$ 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后与曲线 E 重合

B．将曲线 $y=\cos(x+\frac{\pi}{3})$ 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，则与曲线 E 重合

C．将曲线 $f(x)$ 向左平移$\frac{\pi}{6}$后所得图象对应的函数为奇函数

D．若 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$

14．（2021 日照二模 11）若函数 $f(x)=A\sin(2x+\phi)$（$A>0$，$0<\phi<\frac{\pi}{2}$）的部分图像如图所示，则下列叙述正确的是（　　）



A．$(-\frac{\pi}{12}, 0)$是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

B．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称

C．函数 $f(x)$ 在区间$[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$上单调递增

D．函数 $f(x)$ 的图像可由 $y=A\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到

15．（2021 聊城三模 10）将函数 $y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再将所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下面对函数 $g(x)$ 的叙述中正确的是（　　）

A．函效 $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B．函数 $g(x)$ 图象关于点 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 对称

C．函数 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 内单调递增

D．函数 $g(x)$ 图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称

16．（2021 烟台适应性练习二 11）关于函数 $f(x)=\sin x\cos 2x$ 的下列结论正确的是（　　）

A．$x=\frac{\pi}{2}$为 $f(x)$ 图象的一条对称轴

B．$(\pi, 0)$为 $f(x)$ 图象的一个对称中心

C．$f(x)$ 的最大值为$\frac{\sqrt{6}}{9}$

D．$f(x)$ 的最小正周期为 π

17．（2021 省实验中学二模 10）已知 $f(x)=2\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x-1$（$\omega>0$）的最小正周期为 π，则下

列说法正确的有（　　）

A．$\omega=2$

B．函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 上为增函数

C．直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴

D．点 $(\frac{5}{12}\pi,0)$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一个对称中心

18．（2021 泰安二模 10）将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则（　　）

A．函数 $f(x)+g(x)$ 的图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{8},0)$

B．函数 $f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数

C．函数 $f(x)+g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递减区间是 $[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}]$

D．函数 $f(x)\cdot g(x)$ 的图象的一个对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{8}$

19．（2021 潍坊三模 11）已知函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$ 的周期为 2π

B．$y=f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

C．$f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D．$f(x)$ 在区间在 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调递减

20．（2021 青岛二模 10）已知函数 $f(x)=(2\cos^2\omega x-1)\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 4\omega x$（$\omega>0$），则下列说法正确的是（　　）

A．若 $f(x)$ 的两个相邻的极值点之差的绝对值等于 $\frac{\pi}{4}$，则 $\omega=2$

B．当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$

C．当 $\omega=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},0]$ 上单调递增

D．当 $\omega=1$ 时，将 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x-\frac{\pi}{4})$ 的图象

21．（2021 济宁二模 10）函数 $f(x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{6})+1(x\in R)$，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $f(x_1)=f(x_2)=3$，则 $x_1-x_2=k\pi\ (k\in Z)$

B．函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上为增函数

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},1)$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 的图象可以由 $g(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1(x\in R)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

22.（2021 枣庄二模 10）已知函数$f(x)=|\sin x|+\sqrt{3}\left|\sin(x-\frac{\pi}{2})\right|$，则

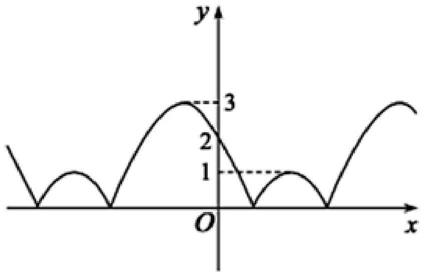
A. $f(x)$在$[\frac{\pi}{2}，\pi]$上的最小值是 1

B. $f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$

C. 直线$x=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$是$f(x)$图象的对称轴

D. 直线$y=\frac{2}{\pi}x$与$f(x)$的图象恰有 2 个公共点

23.（2021 德州二模 10）已知函数 $f(x)=A\cos(x+\varphi)+1(A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，若函数 $y=|f(x)|$ 的部分图像如图所示，则下列说法正确的是（　　）.



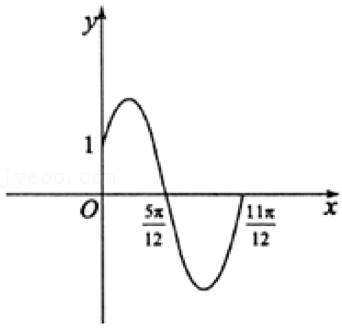
A. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{5}{6}\pi,1)$ 对称

C. 将函数 $y=2\sin x+1$ 的图像向左平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位可得函数 $f(x)$ 的图像

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上的值域为 $[\sqrt{3}+1,3]$

24.（2021 滨州二模 11）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\phi<\pi$）的部分图象如图所示，则下列结论中正确的是（　　）



A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的最大值为 2

C. $f(x)$ 在区间$[-\frac{5\pi}{12}，\frac{\pi}{12}]$上单调递增

D. $f(x+\frac{\pi}{6})$为偶函数

25.（2021 潍坊四县 5 月联考 11）已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})-\sin(\pi+x)$，则有（　　）

A. $f(\frac{\pi}{6})\geqslant f(x)$

B. $f(\frac{\pi}{6}+x)=f(\frac{\pi}{6}-x)$

C. $(\frac{2\pi}{3}，0)$是函数 $f(x)$ 图象的对称中心

D. 方程 $f(x)=\log_{2\pi}x$有三个实根

三、填空题

26.（2021 济宁二模 14）已知 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{2}$，则 $\cos 2\alpha=$ ________.

27.（2021 泰安二模 14）sin20° sin80° - cos160° sin10° ＝__________________.

28.（2021 省实验中学二模 14）已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$，且 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}$ 的值为 _________.

29.（2021 烟台三模 13）已知 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $1-\cos 2\alpha=$______.

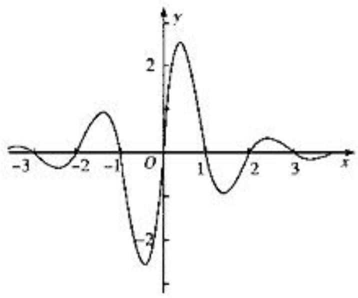
30.（2021 青岛三模 14）若 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\cos 2\alpha=$_________.

31.（2021 烟台适应性练习二 13）已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\tan(\pi-2\alpha)$ 的值为________.

32.（2021 潍坊四县 5 月联考 14）公元前 6 世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派通过研究正五边形和正十边形的作图，发现了黄金分割值约为 0.618，这一数值也可以表示为 $m=2\sin 18°$，若 $m^2+n=4$，则 $\frac{m+\sqrt{n}}{\sin 63°}$ ＝________.

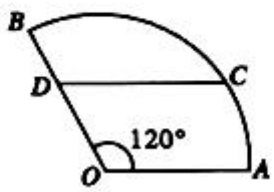
33.（2021 日照二模 15）已知定义在 R 上函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$（$\omega>0$）振幅为 2，满足 $x_2-x_1=2$，且 $f(x_2)=f(x_1)=\sqrt{3}$，则在（0，102）上 $f(x)$ 零点个数最少为_______.

34.（2021 烟台适应性练习一 15）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(x+1)=f(x-1)$，$f(1-x)+f(x)=1$，则 $f(x)$ 的最小正周期为________，$f(x)$ 的一个解析式可以为_______________.



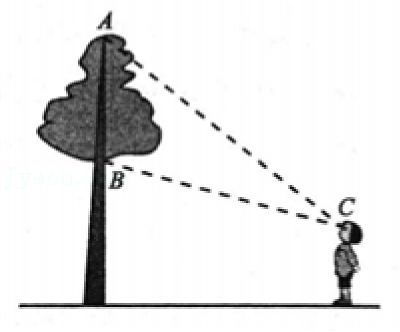
35.（2021 淄博三模 15）已知函数 $f(x)=\frac{4\cos(\omega x+\varphi)}{e^{|x|}}(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，$\omega+\varphi=$_______.

36.（2021 日照三模 14）已知 M，N 是函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\phi)(\omega>0)$ 图象与直线 $y=\sqrt{3}$ 的两个不同的交点．若 $|MN|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{12}$，则 $\omega=$______.



37.（2021 聊城二模 14）如图是某商业小区的平面设计图，初步设计该小区为半径是 200 米，圆心角是 120° 的扇形 AOB．O 为南门位置，C 为东门位置，小区里有一条平行于 AO 的小路 CD，若 $OD=\frac{200\sqrt{6}}{3}$ 米，则圆弧 $\overset{\frown}{AC}$ 的长为________米.

38.（2021 滨州二模 16）最大视角问题是 1471 年德国数学家米勒提出的几何极值问题，故最大视角问题一般称为“米勒问题”．如图，树顶 A 离地面 a 米，树上另一点 B 离地面 b 米，在离地面 c（$c<b$）米的 C 处看此树，离此树的水平距离为___________米时看 A，B 的视角最大.



四、解答题

39.（2021 济南二模 17）在△ABC中，角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，已知△ABC恰好满足下列四个条件中的三个：①$\cos A=\frac{1}{2}$；②$\cos B=-\frac{1}{2}$；③$a=\sqrt{3}$；④$b=1$.

（1）请指出这三个条件（不必说明理由）；

（2）求边 c.

40.（2021 潍坊四县 5 月联考 17）在①$\sqrt{2}a\sin C=c\cos(\frac{\pi}{4}-A)$，②$\sqrt{2}c\cos A=a\cos B+b\cos A$，③$b^2+c^2=a^2+\sqrt{2}bc$这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答问题.

问题：在△ABC中，内角 A，B，C所对边分别为 a，b，c，已知 $b=3$，△ABC的面积为 3，___，求 a.

41.（2021 日照二模 17）向量$\vec{m}=(2\sin x,\sqrt{3})$，$\vec{n}=(\cos x,\cos 2x)$，已知函数 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$.

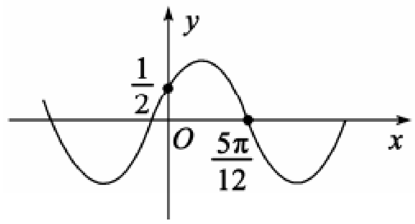
（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间；

（2）△ABC的内角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，其中 $a=7$，若锐角 A满足 $f(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$，且 $\sin B+\sin C=\frac{13\sqrt{3}}{14}$，求 $b+c$ 的值.

42.（2021 枣庄二模 18）若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，$f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f(\dfrac{5\pi}{12})=0$．

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）在锐角△ABC 中，若 A＞B，$f(\dfrac{A-B}{2}-\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\dfrac{A-B}{2}$，并证明 $\sin A>\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．



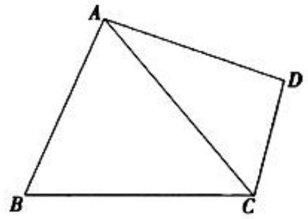
43.（2021 临沂二模 17）在①$x=-\frac{\pi}{6}$是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，②$\frac{\pi}{12}$是函数 $f(x)$ 的一个零点，③函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调递增，且 $b-a$ 的最大值为$\frac{\pi}{2}$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答．

已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$，$(0<\omega<2)$，______，求 $f(x)$ 在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的单调递减区间．

44.（2021 省实验中学二模 17）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，$BC=4$.

（1）若△ABC 的面积为 $3\sqrt{3}$，求 AC;

（2）若 $AD=3\sqrt{3}$，$\angle ACB=\angle ACD+\dfrac{\pi}{3}$，求 $\tan\angle ACD$.



45.（2021 菏泽二模 17）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b^2=c$，$\sin C=\sqrt{3}\sin B$，

__________ .

①$\sin C-\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A$　　②$\dfrac{b\cos B}{c}=\sin B$　　③$a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$

从以上三个条件中选择一个条件补充在题干中，完成下列问题.

（1）求 B;

（2）求△ABC 的面积.

（注:如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

46.（2021 日照三模 17）已知△ABC的内角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，且$\frac{c}{b}<\cos A$.

（1）求证：B是钝角；

（2）请从下列四个条件中选择三个；

①$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$；②$a=2$；③$c=\sqrt{2}$；④$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

是否存在△ABC满足您选择的这三个条件，若存在，求边长 b的值；若不存在，请说明理由.

47.（2021 淄博三模 17）△ABC的内角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，$\cos(\frac{\pi}{3}-B)\cdot\sin(\frac{\pi}{6}+B)=\frac{3}{4}$，$a+c=2$.

（1）求角 B的大小；

（2）求△ABC外接圆面积的最小值.

48.（2021 聊城三模 17）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $10\sin^2\frac{A+C}{2}=7-\cos 2B$，

（1）求角 B 的大小；

（2）已知点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，且 $AB>BD$，若 $S_{\triangle ABD}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$AD=\sqrt{7}$，求 AC.

49.（2021 滨州二模 17）在① $\sqrt{3}b\cos A=2c\sin C-\sqrt{3}a\cos B$，② $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+C\right)+\cos C=\frac{5}{4}$，③ $a\sin\frac{A+B}{2}=c\sin A$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答.

问题：在锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知__________.

（1）求角 C；

（2 若 $AB=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{2}$，内角 C 的平分线 CE 交边 AB 于点 E，求 CE 的长.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

50.（2021 烟台三模 18）在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为角A，B，C的对边，且满足

$4\cos^2\dfrac{A}{2}-\cos 2\left(B+C\right)=\dfrac{7}{2}$.

（1）求A；

（2）若点D满足$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{3}$，求$c-\dfrac{2}{3}b$的取值范围.

51.（2021 济宁二模 17）在① $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$ ；② $2a\sin C=c\tan A$ ；③ $2\cos^2\frac{B+C}{2}=\cos 2A+1$ ；

三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

问题：已知 $\triangle ABC$ 的内角 A ，B ，C 所对应的边分别为 a ，b ，c ，若 $b=\sqrt{2}$ ，______.

（1）求 A 的值；

（2）若 $\sin B=\sqrt{2}\sin C$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

52.（2021 青岛三模 18）在△ABC中，角 A，B，C所对的边分别为 a，b，c，$c\cos A=(\sqrt{2}b-a)\cos C$.

（1）若 $A=\dfrac{\pi}{12}$，点 D在边 AB上，$AD=BC=1$，求△BCD的外接圆的面积；

（2）若 $c=2$，求△ABC面积的最大值.

53.（2021 烟台适应性练习二 17）从①$\sin A=\cos\dfrac{A}{2}$，②$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，③$a\cos C+(2b+c)\cos A=0$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答.

问题：在△ABC中，角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，____.

（1）求 A;

（2）若 $a=2$，求△ABC面积的最大值.

54.（2021 潍坊三模 18）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，M是AC上的点，BM平分$\angle ABC$，$\triangle ABM$的面积是$\triangle BCM$面积的 2 倍.

（1）求$\dfrac{\sin C}{\sin A}$；

（2）若$\cos B=\dfrac{1}{4}$，$b=2$，求$\triangle ABC$的面积.

55.（2021 淄博二模 18）已知 $\triangle ABC$ 的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ， $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$ ，设 $\vec{m}=(b,c)$ ， $\vec{n}=(a,b)$ 且 $\vec{m}//\vec{n}$.

（1）求角 B 的大小；

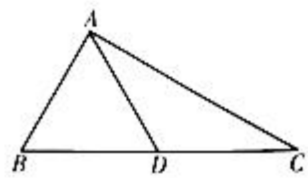
（2）延长 BC 至 D ，使 $BD=5$ ，若 $\triangle ACD$ 的面积 $S=\sqrt{3}$ ，求 AD 的长.

56.（2021 德州二模 18）在锐角三角形 ABC 中，角 A、B 、C 的对边分别为 a ，b ，c ，已知 $6\cos^2(\frac{\pi}{2}+A)+\cos A=5$.

（1）求 A;

（2）若 $a=2$ ，求 b^2+c^2 的取值范围.

57.（2021 潍坊二模 18）如图，D 为△ABC 中 BC 边上一点，$\angle B=60^\circ$ ，$AB=4$，$AC=4\sqrt{3}$. 给出如下三种数值方案：



①$AD=\sqrt{5}$；②$AD=\sqrt{15}$；③$AD=2\sqrt{7}$.

判断上述三种方案所对应的△ABD 的个数，并求△ABD 唯一时，BD 的长.

58.（2021 青岛二模 17）请从“①$2\sin A\cos B=2\sin C+\sin B$；②$\cos A+\cos\frac{A}{2}=0$.”两个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并解答.

已知△ABC的内角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，_____.

（1）求 A；

（2）设 AD是∠A的平分线，$b+c=10$ 且△ABC面积为$2\sqrt{3}$，求线段 AD的长度.

59.（2021 聊城二模 17）在①$\overrightarrow{m}=$（$\cos B$，$2c-b$），$\overrightarrow{n}=$（$\cos A$，a），且$\overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$，②$b=a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin A$，③$\cos^2A+\cos A\cos$（$C-B$）$=\sin B\sin C$这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答.

已知△ABC中，三个内角 A，B，C所对的边分别是 a，b，c.

（1）求 A的值；

（2）若 $a=\sqrt{3}$，△ABC的面积是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，点 M是 BC的中点，求 AM的长度.

60.（2021 烟台适应性练习一 19）在条件①$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=-\sqrt{3}\sin B\sin C$，②$b=a\cos C+\frac{1}{2}c$，③$(\cos C-\sqrt{3}\sin C)\cos A+\cos B=0$中，任选一个补充在下面问题中并求解.

问题：在锐角△ABC中，内角 A，B，C的对边分别为 a，b，c，$c=1$，____.

（1）求 A;

（2）求△ABC面积的取值范围.

61.（2021 泰安二模 18）在①$\sqrt{3}\sin C+\cos C=\frac{b+c}{a}$，②$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$，③$2\cos A(c\cos B+b\cos C)=a$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

问题：在△ABC中，内角 A，B，C所对的边分别为 a，b，c，且________.

（1）求角 A;

（2）若 O是△ABC内一点，$\angle AOB=120°$，$\angle AOC=150°$，$b=1$，$c=3$，求 $\tan\angle ABO$.

专题四　平面向量

一、　单项选择题

1.（2021 聊城二模 3）已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{2})$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2.（2021 淄博三模 4）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $|\vec{b}|=|\vec{a}|=|\vec{a}-\vec{b}|=1$，则 $|2\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

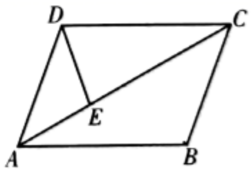
3.（2021 烟台适应性练习二 5）若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，且 $(\vec{a}-\vec{b})\perp(2\vec{a}+3\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{33}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

4.（2021 潍坊四县 5 月联考 4）已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(0,m)$，$\vec{c}=(2,4)$，且 $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$，则实数 m 的值为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5.（2021 潍坊三模 4）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，若 $\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AB}$，则 $\lambda+\mu=$（　　）



A. $-\frac{1}{3}$　　B. 1

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

6.（2021 济宁二模 6）在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，已知点 $M(\sqrt{3},-1)$ 和点 $N(0,1)$．若点 P 在 $\angle MON$ 的角平分线上，且 $|\overrightarrow{OP}|=4$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=$（　　）

A. -2　　B. -6　　C. 2　　D. 6

7.（2021 聊城三模 7）在 $\triangle ABC$ 中，$|AB|=3$，$|AC|=4$，$|BC|=5$，M 为 BC 中点，O 为 $\triangle ABC$ 的内心，且 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AM}$，则 $\lambda+\mu=$（　　）

A. $\frac{7}{12}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. 1

8.（2021 德州二模 6）在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{6}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$（　　）

A. -9　　B. $-\frac{9}{2}$　　C. -7　　D. $-\frac{7}{2}$

9.（2021 烟台适应性练习一 7）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=\sqrt{3}$，点 P 在 CD 上，$\overrightarrow{DP}=3\overrightarrow{PC}$，点 Q 在 BP 上，$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}=14$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=$（　　）

A．6　　B．8　　C．10　　D．12

10.（2021 临沂二模 7）点 A，B，C 在圆 O 上，若 $|AB|=2$，$\angle ACB=30°$，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为（　　）

A．3　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．6

11.（2021 烟台三模 5）在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC$，$AB=2BC=2CD=2$，P 是腰 AD 上的动点，则 $|2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|$ 的最小值为（　　）

A．$\sqrt{7}$　　B．3　　C．$\dfrac{\sqrt{27}}{2}$　　D．$\dfrac{27}{4}$

12.（2021 日照三模 7）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，若向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c}-\vec{a}|\leqslant 1$，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 的取值范围是（　　）

A．$[-4,4]$　　B．$[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　C．$[0,2\sqrt{3}]$　　D．$[0,4]$

二、多项选择题

13.（2021 菏泽二模 9）已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的两个单位向量，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，$\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\theta$，则下列结论正确的有

A. $|\boldsymbol{c}|<\sqrt{3}$　　B. $|\boldsymbol{c}|>\sqrt{3}$　　C. $\cos\theta\geq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\cos\theta\leq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

三、填空题

14.（2021 泰安二模 13）设向量 $\vec{a}=(1,m)$，$\vec{b}=(2,1)$，且 $\vec{b}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=7$，则 $m=$_______.

15.（2021 济南二模 13）已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值为______.

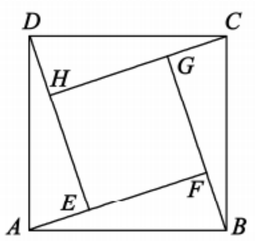
16.（2021 淄博二模 13）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为________.

17.（2021 滨州二模 14）已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为_________.

18.（2021 青岛二模 14）在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2=1$，$AC=\sqrt{5}$，则 $\angle BAD=$________.

19.（2021 枣庄二模 14）如图，由四个全等的三角形与中间的一个小正方形 EFGH 拼成的一个大正方形 ABCD

中，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AE}$，设$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则$x+y$的值为________.



20.（2021 潍坊二模 16）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=1$且$\vec{a}\cdot\vec{b}+1=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的取值范围是__________.

专题五　不等式

一、　多项选择题

1.（2021 枣庄二模 9）已知$a>0$，$b>0$，$a+b^2=1$，则

A. $a+b<\frac{5}{4}$　B. $a-b>-1$　C. $\sqrt{a}\cdot b\le\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{a}}{b-2}\ge-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.（2021 聊城二模 9）已知$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论一定正确的是（　　）

A. $a^2<b^2$　B. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　C. $lga^2>lgab$　D. $|a|^a<|a|^b$

3.（2021 烟台适应性练习二 9）下列命题成立的是（　　）

A. 若$a<b<0$，则$a|a|<b|b|$

B. 若$a>0$，$b>0$，$c>0$，则$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

C. 若$a>0$，$b>0$，则$a+\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}\ge4$

D. 若$a>0$，$b\in R$，则$a\ge2b-\frac{b^2}{a}$

4.（2021 潍坊四县 5 月联考 10）a，b为实数且$a>b>0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

B. $2021^{a-1}>2021^{b-1}$

C. $a+b+2>2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$

D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$

5.（2021 烟台三模 10）10. 已知$a>0$，$b>0$，且$a-b=1$，则（　　）

A. $e^a-e^b>1$　B. $a^e-b^e<1$　C. $\frac{9}{a}-\frac{1}{b}\le4$　D. $2\log_2 a-\log_2 b\ge2$

6.（2021 聊城三模 11）已知实数a、b，下列说法一定正确的是（　　）

A. 若$a<b$，则$\left(\frac{2}{7}\right)^b<\left(\frac{2}{7}\right)^a<\left(\frac{3}{7}\right)^a$

B. 若 $b>a>1$ ，则 $\log_{ab}a<\frac{1}{2}$

C. 若 $a>0$ ， $b>0$ ， $a+2b=1$ ，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 8

D. 若 $b>a>0$ ，则 $\frac{1+a}{b^2}>\frac{1+b}{a^2}$

7.（2021 潍坊二模 10）已知 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，下列结论正确的是（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为 9　　B. a^2+b^2的最小值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\log_2a+\log_2b$ 的最小值为 - 3　　D. 2^a+4^b的最小值为 $2\sqrt{2}$

8.（2021 烟台适应性练习一 10）下列命题正确的是（　　）

A. 若 $a>b>0$，$c<0$，则$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$　　B. 若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，则$\frac{a}{b}\leq\frac{a+c}{b+c}$

C. 若 $a>b>0$，则$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}<\sqrt{\frac{a+b}{2}}$　　D. 若 $a>-1$，$b>0$，$a+2b=2$，则$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}$的最小值为 3

9.（2021 济宁二模 9）已知 $a>b>0$ ， $c\in R$ ，下列不等式恒成立的有（　　）

A. $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$　　B. $ac^2>bc^2$　　C. $\log_2\frac{1}{a}>\log_2\frac{1}{b}$　　D. $(\frac{a+b}{2})^2<\frac{a^2+b^2}{2}$

10.（2021 青岛二模 11）下列不等式成立的是（　　）

A. $\log_2(\sin 1)>2^{\sin 1}$　　B. $(\frac{1}{\pi})^2<\pi^{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{6}-2$　　D. $\log_43<\log_65$

11.（2021 青岛三模 11）在平面直角坐标系中，$A(t,\frac{2}{t})$，$B(8-m,8-\frac{3}{2}m)$，$C(7-m,0)$，O为坐标原点，P为 x 轴上的动点，则下列说法正确的是（　　）

A. $|\overrightarrow{OA}|$的最小值为 2

B. 若 $t=1$，$m=4$，则△ABC 的面积等于 4

C. 若 $t=1$，$m=4$，则 $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|$的最小值为 5

D. 若 $t=\sin\theta$， $\theta\in(0,\pi)$，且$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{CB}$的夹角 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$，则 $m\in(-\infty,5)$

二、填空题

12.（2021 青岛二模 13）命题“$\exists x\in R$，$e^x<a-e^{-x}$”为假命题，则实数 a 的取值范围为_________.

13.（2021 日照二模 14）已知点（a，b）在直线 $x+4y=4$ 上，当 $a>0$，$b>0$ 时，$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}$的最小值为_______.

专题六　数列

一、　单项选择题

1.（2021 淄博二模 3）已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为其前 n 项和，若 $2S_3=a_2+a_3+a_4$，则公比 $q=$（　　）.

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　　C. 1　　D. 2

2.（2021 淄博三模 3）在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 a_{2021} 是 a_{2019}，a_{2020} 两项的等差中项，则 $q=$（　　）

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. －1

3.（2021 青岛三模 4）行列式是近代数学中研究线性方程的有力工具，其中最简单的二阶行列式的运算定义如下：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\begin{vmatrix} 1 & (10-a_7) \\ 1 & a_9 \end{vmatrix}=0$，则 $S_{15}=$（　　）

A. $\dfrac{15}{2}$　　B. 45　　C. 75　　D. 150

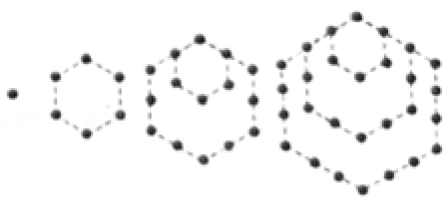
4.（2021 省实验中学二模 4）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为奇数，其中所有奇数项之和为 319，所有偶数项之和为 290，则该数列的中间项为（　　）

A. 28　　B. 29　　C. 30　　D. 31

5.（2021 青岛二模 5）已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_n+b_n=1$，$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-a_n^2}$，则 $b_{2021}=$（　　）

A. $\frac{2021}{2020}$　　B. $\frac{2020}{2021}$　　C. $\frac{2021}{2022}$　　D. $\frac{2022}{2021}$

6.（2021 烟台适应性练习一 6）传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家用沙粒和小石子研究数．他们根据沙粒和石子所排列的形状把数分成许多类，如三角形数、正方形数、五边形数、六边形数等．如图所示，将所有六边形数、按从小到大的顺序排列成数列，前三项为 1，6，15，则此数列的第 10 项为（　　）



A. 120　　B. 153　　C. 190　　D. 231

7.（2021 聊城二模 8）已知数列 $\{a_n\}$，$a_n=\dfrac{1}{f(n)}$，其中 $f(n)$ 为最接近 $\sqrt{n}$ 的整数，若 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 20，则 $m=$（　　）

A. 15　　B. 30　　C. 60　　D. 110

二、　多项选择题

8.（2021 济南二模 11）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^n$，$n\in N_+$，则下列说法正确的是（　　）

A．$a_4=4$　　　　B．$\{a_{2n}\}$是等比数列

C．$a_{2n}-a_{2n-1}=2^{n-1}$　　　　D．$a_{2n-1}+a_{2n}=2^{n+1}$

9.（2021 潍坊三模 12）如图所示的数表中，第 1 行是从 1 开始的正奇数，从第 2 行开始每个数是它肩上两个数之和．则下列说法正确的是（　　）

1　3　5　7　9　11　…

4　8　12　16　20　…

12　20　28　36　…

…

A．第 6 行第 1 个数为 192

B．第 10 行的数从左到右构成公差为2^{10}的等差数列

C．第 10 行前 10 个数的和为95×2^9

D．数表中第 2021 行第 2021 个数为6061×2^{2020}

10.（2021 滨州二模 10）已知一组数据的平均数、中位数、众数依次成等差数列，若这组数据丢失了其中的一个，剩下的六个数据分别是 2，2，4，2，5，10，则丢失的这个数据可能是（　　）

A．-11　　B．3　　C．9　　D．17

11.（2021 日照三模 10）已知 S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$（$n\geq 3$），则下列结论正确的是（　　）

A．数列$\{a_n+a_{n+1}\}$为等比数列　　　　B．数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$为等比数列

C．$a_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$　　　　D．$S_{20}=\frac{2}{3}(4^{10}-1)$

12.（2021 省实验中学二模 12）在数学课堂上，教师引导学生构造新数列：在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列，将数列 1，2 进行构造，第 1 次得到数列 1，3，2；第 2 次得到数列 1，4，3，5，2，…；第 n（$n\in N^*$）次得到数列 1，x_1，x_2，x_3，…，x_k，2；….记 $a_n=1+x_1+x_2+\cdots+x_k+2$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则（　　）

A．$k+1=2^n$　　　　B．$a_{n+1}=3a_n-3$

C．$a_n=\frac{3}{2}(n^2+3n)$　　　　D．$S_n=\frac{3}{4}(3^{n+1}+2n-3)$

13.（2021 淄博二模 12）记 $\langle x\rangle$ 表示与实数 x 最接近的整数，数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=\frac{1}{\langle\sqrt{n}\rangle}(n\in N^*)$，其前 n 项和为 S_n，设 $k=\langle\sqrt{n}\rangle$，则下列结论正确的是（　　　）.

A. $\sqrt{n}=k-\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$ C. $n\geq k^2-k+1$ D. $S_{2021}=88$

三、 填空题

14.（2021 滨州二模 13）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=7$，$S_3=21$，则公比$q=$__________.

15.（2021 聊城三模 13）数列 1，1，2，3，5，8，13，21，34，…称为斐波那契数列，是意大利著名数学家斐波那契于 1202 年在他写的《算盘全书》提出的，该数列的特点是：从第三起，每一项都等于它前面两项的和．在该数列的前 2021 项中，奇数的个数为________．

16.（2021 潍坊四县 5 月联考 15）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1021$，其n前项和S_n满足$S_n=-S_{n-1}-n^2$，则a_{2021}＝_________．

17.（2021 泰安二模 15）数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$2S_n-na_n=n$（$n\in N^*$），若$S_{20}=-360$，则$a_2=$________．

18.（2021 潍坊二模 14）数学史上著名的“冰雹猜想”指的是：任取一个正整数m，若m是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若m是偶数，就将该数除以 2．反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 1→4→2→1．按照上述猜想可得到一个以m为首项的无穷数列记作$\{a_n\}$，$\{a_n\}$满足的递推关系为$a_1=m$，$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}，a_n\text{为偶数，}\\3a_n+1，a_n\text{为奇数.}\end{cases}$如取$m=6$，根据上述运算法则得出$a_9=1$，$a_{10}=4$，…，若$a_7=1$，则满足条件的一个$m$的值为________．

19.（2021 烟台适应性练习二 15）任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2．反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 1→4→2→1．这就是数学史上著名的“冰雹猜想”．例如：正整数$m=6$，根据上述运算法则得出 6→3→10→5→16→8→4→2→1，共经过 8 个步骤变成 1（简称为 8 步“雹程”）．“冰雹猜想”可表示为数列$\{a_n\}$：$a_1=m$（m为正整数），$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}，a_n\text{为偶数}\\3a_n+1，a_n\text{为奇数}\end{cases}$，若$a_6=2$，则$m$的所有可能取值之和为_______．

20.（2021 烟台三模 15）已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\log_2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$．给出定义：使数列$\{a_n\}$的前$k$项和为正整数的$k$ $\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$叫做“好数”，则在$[1,2021]$内的所有“好数”的和为______．

21.（2021 菏泽二模 16）已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，则不超过

$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2025}}$ 的最大整数是____________。

四、 解答题

22.（2021 济南二模 18）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_2=4$，$S_5=30$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\frac{2}{a_n^2-1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

23.（2021 潍坊三模 17）已知正项等比数列$\{a_n\}$，其中a_1，a_2，a_3分别是下表第一、二、三行中的某一个数，令$b_n = 2\log_2 a_n$.

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	3	2
第二行	4	10	9
第三行	18	8	11

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

（2）设数列$\left\{\dfrac{1}{b_n^2-1}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n < \dfrac{1}{2}$.

24.（2021 枣庄二模 17）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=a_2=1$，且$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$．记$b_n=a_{n+1}+a_n$，求证：

（1）$\{b_n\}$是等比数列；

（2）$\{b_n\}$的前n项和T_n满足$\dfrac{b_n}{T_1\cdot T_2}+\dfrac{b_3}{T_2\cdot T_3}+\cdots+\dfrac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$．

25.（2021 烟台适应性练习一 17）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1$，$2S_n=na_{n+1}$，$n\in N^*$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，$b_nb_{n+1}=2^n$，$n\in N^*$，按照如下规律构造新数列$\{c_n\}$：a_1，b_2，a_3，b_4，a_5，b_6，…，求$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和.

26.（2021 泰安二模 17）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，数列$\{b_n\}$为等比数列，满足 $a_1=b_2=2$，$S_5=30$，b_4+2 是 b_3 与 b_5 的等差中项.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）从数列$\{a_n\}$中去掉数列$\{b_n\}$的项后余下的项按原来的顺序组成数列$\{c_n\}$，设数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_{60}.

27.（2021 潍坊四县 5 月联考 18）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=a_2=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+1$.

（1）求证：当 $n\geqslant 2$，$a_{n+1}-a_n$为定值；

(2)把数列$\{a_n\}$和数列$\{2^{a_n}\}$中的所有项从小到大排列,组成新数列$\{c_n\}$,求数列$\{c_n\}$的前 100 项和 T_{100}.

28.（2021 德州二模 17）在① $2S_n+1=3^n$ ；② $a_1a_2\cdots a_n=3^{\frac{n^2-n}{2}}$ ；③ $2S_n-3a_n+1=0$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中并作答.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1=1$ ，且满足______，设数列 $\{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{(n+1)\cdot\log_3 a_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n ，并证明 $T_n<\frac{5}{2}$.

（注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分）

29.（2021 聊城三模 18）在① a_1 ， a_3 ， a_{21} 成等比数列② $S_4=28$ ，③ $S_{n+1}=S_n+a_n+4$ ，这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并做出解答.

已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，S_n 为其 n 前项和，$a_2=5$ ，_______，$\{b_n\}$ 是等比数列，$b_2=9$ ， $b_1+b_3=30$ ，公比 $q>1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的所有项分别构成集合 A ， B ， 将 $A\cup B$ 的元素按从小到大依次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$ ，求 $T_{80}=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{80}$.

30.（2021 淄博二模 17）在① $S_5=50$ ，② S_1 ， S_2 ， S_4 成等比数列，③ $S_6=3(a_6+2)$ ．这三个条件中任选两个，补充到下面问题中，并解答本题．

问题：已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$ ，前 n 项和为 S_n ，且满足______．

（1）求 a_n ；

（2）若 $b_n-b_{n-1}=2a_n(n\geq 2)$ ，且 $b_1-a_1=1$ ，求数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和 T_n ．

注：如果选择多种情况分别解答，按第一种解答计分．

31.（2021 滨州二模 18）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1=1$ ，

$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\left(n\in\mathbf{N}^*且n\geq 2\right)$.

（1）求证：数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[-1,2]=-2$ ，$[2,1]=2$，求证：$\left[\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\right]=1$.

32.（2021 烟台三模 17）在① $a_3^2=a_2a_4+4$，② $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列，③ $S_4^2=S_2\cdot S_8$，这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中并作答.

问题：在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，______，数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，设 $c_n=a_n\cdot b_n$，T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，求使 $T_n>2000$ 成立的最小正整数 n 的值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

33.（2021 省实验中学二模 18）已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，前 3 项和为 13，且 $3a_1$，$5a_2$，$3a_3$ 成等差数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）各项均为正数的数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=1$，其前 n 项和为 S_n，且 ____，若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_nb_n$，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

在如下三个条件中任意选择一个，填入上面横线处，并根据题意解决问题.

① $b_n=2\sqrt{S_n}-1$；② $2b_n=b_{n-1}+b_{n+1}$（$n\geqslant 2$），$b_2=3$；③ $S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$（$n\geqslant 2$）.

34.（2021 菏泽二模 18）已知正项数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，前n项和为S_n，且满足$a_na_{n+1}+1=4S_n(n\in N^*)$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式：

（2）设$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$数列$\{b_n\}$前$n$和为$T_n$，求使得$T_n<\dfrac{2n+1}{n^2}$成立的$n$的最大值.

35.（2021 日照二模 19）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-9$，且$\dfrac{a_{n+1}}{2}$是 2 与a_n（$n\in N^*$）的等差中项.

（1）求数列$\{|a_n|\}$的前n项和G_n；

（2）设$T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$，判断数列$\{T_n\}$是否存在最大项和最小项？若存在求出，不存在说明理由.

36.（2021 临沂二模 19）已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，数列$\{b_n\}$为等比数列，满足 $4S_n=a_{n+1}^2-4n-4$，且 $a_1=b_1+1=2$，$a_4=b_4$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$为等差数列；

（2）若从数列$\{a_n\}$中去掉数列$\{b_n\}$的项后余下的项按原来的顺序组成数列$\{c_n\}$，求 $c_1+c_1+c_3+\cdots+c_{100}$.

37.（2021 聊城二模 18）数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，点（n，a_n+a_{n+1}）在函数 $y=kx+1$ 图象上，其中 k 为常数，且 $k\neq 0$.

（1）若 a_1，a_2，a_4 成等比数列，求 k 的值；

（2）当 $k=3$ 时，求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

38.（2021 济宁二模 18）已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，满足 a_3 是 $2a_1$ 、$3a_2$ 的等差中项，$a_4=16$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=(-1)^n\log_2 a_{2n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

39.（2021 烟台适应性练习二 18）已知$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，$a_1>0$，且 a_4 是 $2a_2$ 和 a_5-2 的等比中项.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=2^{n+1}$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

40.（2021 日照三模 19）定义：若无穷数列$\{c_n\}$满足$\{c_{n+1}-c_n\}$是公比为 k 的等比数列，则称数列$\{c_n\}$为“V（k）数列”.

（1）若$\{b_n\}$是 V（k）数列，$b_1=10$，$b_2=8$，$b_3=6$，求数列$\{b_n\}$前 11 项和 S_{11}.

（2）若数列$\{a_n\}$是 V（2）数列，$a_1=1$，$a_2=3$，是否存在正整数 m，n，使得$\frac{199}{99}<\frac{a_m}{a_n}<\frac{99}{49}$成立，若存在求出所有的正整数 m，n，不存在说明理由.

41.（2021 青岛二模 19）已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3-a_1=8$，且 a_2-1 是 a_1 和 a_3+1 的等比中项，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $b_1=3$，$2S_n=b_{n+1}-3$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）将数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中的公共项按从小到大的顺序依次排成一个新的数列$\{c_k\}$，$k\in N^*$，令 $d_k=\log_3 c_k$，求数列$\{\frac{1}{d_k d_{k+1}}\}$的前 k 项和 T_k.

42.（2021 青岛三模 22）若数列$\{a_n\}$满足：对于任意 $n\in N^+$，只有有限个正整数 m 使得 $a_m<n$ 成立，则记这样的 m 的个数为$(a_n)^+$.

（1）求数列$\{(\sqrt{n-1})^+\}$的通项公式；

（2）在等比数列$\{b_n\}$中，b_{n+1}是函数 $f_n(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}[eb_n+(\sqrt{n-1})^+]x^2+eb_n\cdot(\sqrt{n-1})^+\cdot x$ 的极小值点，求 b_1 的取值范围；

（3）求数列$\{((n^2)^+)^+\}$的通项公式.

43.（2021 潍坊二模 22）设 $a_n=x^n$，$b_n=\frac{1}{n^2}$，S_n为数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前 n 项和，令 $f_n(x)=S_n-1$，其中 $x\in R$，$n\in N^+$.

（1）当 $x=2$ 时，数列$\{a_n\}$中是否存在三项，使其成等差数列？并说明理由；

（2）证明：对$\forall n\in N^+$，关于 x 的方程 $f_n(x)=0$ 在 $x\in[\frac{2}{3}, 1]$上有且仅有一个根 x_n；

（3）证明：对$\forall p\in N^+$，由（2）中 x_0 构成的数列$\{x_n\}$满足 $0<x_n-x_{n+p}<\frac{1}{n}$.

44.（2021 淄博三模 22）若存在常数 $m\in R$，使得对于任意 $n\in N^*$，都有 $a_{n+1}\geq ma_n$，则称数列$\{a_n\}$为 $Z(m)$ 数列.

（1）已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，其前 n 项和为 S_n，若 S_n为 $Z(1)$ 数列，求 a_1 的取值范围；

（2）已知数列$\{b_n\}$的各项均为正数，记$\{b_n\}$的前 n 项和为 R_n，数列$\{b_n^2\}$的前 n 项和为 T_n，且 $3T_n=R_n^2+4R_n$，$n\in N^*$，若数列$\{c_n\}$满足 $c_n=b_n+\frac{1}{b_n}$，且$\{c_n\}$为 $Z(m)$ 数列，求 m 的最大值；

（3）已知正项数列$\{d_n\}$满足：$d_n\leq d_{n+1}$（$n\in N^*$），且数列$\{d_{2k-1}d_{2k+1}\}$为 $Z(r)$ 数列，数列$\{\frac{1}{d_{2k}d_{2k+2}}\}$为 $Z(s)$ 数列，若 $\frac{d_2}{d_1}=rs$，求证：数列$\{d_n\}$中必存在无穷多项可以组成等比数列.

专题七　立体几何与空间向量

一、单项选择题

1.（2021 青岛三模 3）设 α，β 是空间两个不同平面，a，b，c 是空间三条不同直线，下列命题为真命题的是（　　）

A. 若 $\alpha // \beta$，$b // \alpha$，则 $b // \beta$

B. 若直线 a 与 b 相交，$a // \alpha$，$b // \beta$，则 α 与 β 相交

C. 若 $\beta \perp \alpha$，$a // \alpha$，则 $a \perp \beta$

D. 若 $\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = a$，$b \subset \alpha$，$b \perp a$，$c \perp \beta$，则 $b // c$

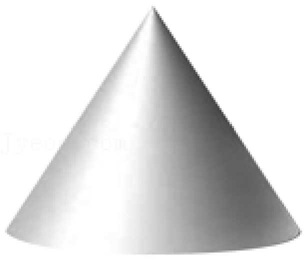
2.（2021 泰安二模 3）已知圆锥的轴截面是边长为 8 的等边三角形，则该圆锥的侧面积是（　　）

A. 64π　　B. 48π　　C. 32π　　D. 16π

3.（2021 淄博二模 4）若圆台的上、下底面面积分别为 4，16，则圆台中截面的面积为（　　　）.

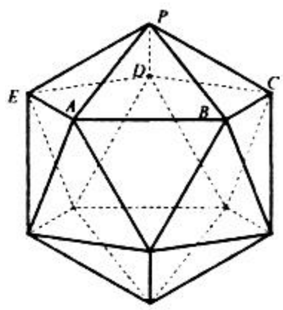
A. 10　　B. 8　　C. 9　　D. $8\sqrt{2}$

4.（2021 临沂二模 5）如图为一个圆锥形的金属配件，重 75.06 克，其正视图是一个等边三角形，现将其打磨成一个体积最大的球形配件，则该球形配件的重量约为（　　）



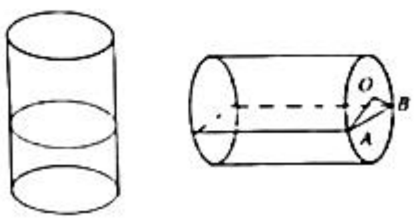
A. 32.69 克　　B. 33.36 克　　C. 34.03 克　　D. 34.37 克

5.（2021 烟台适应性练习二 4）许多球状病毒的空间结构可抽象为正二十面体．正二十面体的每一个面均为等边三角形，共有 12 个顶点、30 条棱．如图所示，由正二十面体的一个顶点 P 和与 P 相邻的五个顶点可构成正五棱锥 $P-ABCDE$，则 PA 与面 $ABCDE$ 所成角的余弦值约为（　　）（参考数据：cos36° ≈0.8）



A. $\dfrac{5}{6}$　　B. $\dfrac{5}{8}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

6.（2021 潍坊四县 5 月联考 6）一个封闭的圆柱形容器，内部装有高度为三分之一的水（图一），将容器歪倒放在水平放置的桌面上，设水面截底面得到的弦 AB 所对的圆心角为 θ，则（　　）



A. $\theta = \dfrac{\pi}{3}$　　B. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{3}=\theta-\sin\theta$　　D. $\frac{2\pi}{3}=\theta-\sin\theta$

7. （2021 烟台三模 4）陀螺指的是绕一个支点高速转动的几何体，是中国民间最早的娱乐工具之一．传统陀螺大致是木或铁制的倒圆锥形，玩法是用鞭子抽．中国是陀螺的老家，从中国山西夏县新石器时代的遗址中，就发掘了石制的陀螺．如图，一个倒置的陀螺，上半部分为圆锥，下半部分为同底圆柱，其中总高度为 8cm，圆柱部分高度为 6cm，已知该陀螺由密度为 0.7g/cm^3 的木质材料做成，其总质量为 70g，则最接近此陀螺圆柱底面半径的长度为（　　）

A. 2.2cm　　B. 2.4cm　　C. 2.6cm　　D. 2.8cm

8. （2021 滨州二模 3）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是棱 DD_1 的中点，P 是底面 $ABCD$ 内（包括边界）的一个动点，若 $MP//$ 平面 A_1BC_1，则异面直线 MP 与 A_1C_1 所成角的取值范围是（　　）

A. $(0,\frac{\pi}{3}]$　　B. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$　　C. $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$　　D. $[\frac{\pi}{3},\pi)$

9. （2021 青岛二模 6）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，点 P 在矩形 ACC_1A_1 区域（包含边界）内运动，且 $\angle PBD=45°$，则动点 P 的轨迹长度为（　　）

A. π　　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. 2π　　D. $2\sqrt{2}\pi$

10. （2021 潍坊二模 8）在菱形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\angle A=60°$，连结 BD，沿 BD 把 $\triangle ABD$ 折起，使得二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $60°$，连结 AC，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为（　　）

A. 13π　　B. 24π　　C. 36π　　D. 52π

11. （2021 日照三模 8）棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内运动，点 B_1 到直线 DP 的距离为定值，若动点 P 的轨迹为椭圆，则此定值可能为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$　　B. $\sqrt{3}a$　　C. $\sqrt{6}a$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}a$

12. （2021 济南二模 8）已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，平面 α 与棱 AB，CD 均平行，则 α 截此正四面体所得截面面积的最大值为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

13. （2021 日照二模 8）在棱长为 $\sqrt{3}+1$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，球 O 同时与以 B 为公共顶点的三个面相切，球 O_2 同时与以 D_1 为公共顶点的三个面相切，且两球相切于点 E，若球 O_1，O_2 的半径分别为 r_1，r_2，则（　　）

A. $O_1B=\sqrt{2}r_1$　　B. $r_1+r_2=6$

C. 这两个球的体积之和的最小值是 $\sqrt{3}\pi$　　D. 这两个球的表面积之和的最小值是 4π

二、多项选择题

14.（2021 淄博二模 9）已知 α ， β 是两个不同的平面， m ， n 是两条不同的直线，且 $m,n\not\subset\alpha$ ， $m,n\not\subset\beta$ ，给出下列四个论断：① $\alpha//\beta$ ；② $m//n$ ；③ $m//\alpha$ ；④ $n//\beta$ ．以其中三个论断为条件，剩余论断为结论组成四个命题．其中正确的命题是（　　）．

A．①②③⇒④　　B．①③④⇒②　　C．①②④⇒③　　D．②③④⇒①

15.（2021 潍坊三模 10）已知 α ， β 是两个平面， m ， n 是两个条件，则下列结论正确的是（　　）

A．如果 $m\perp\alpha$ ， $n//\alpha$ ，那么 $m\perp n$

B．如果 $m\perp n$ ， $m\perp\alpha$ ， $n//\beta$ ，那么 $\alpha\perp\beta$

C．如果 $\alpha//\beta$ ， $m\subset\alpha$ ，那么 $m//\beta$

D．如果 $m//\alpha$ ， $n//\beta$ 且 $\alpha//\beta$ ，那么 $m//n$

16.（2021 日照二模 9）已知 m，n 是两条不重合的直线，α，β 是两个不重合的平面，则（　　）

A．若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m//n$　　B．若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

C．若 $m//\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D．若 $\alpha\perp\beta$，$m//\alpha$，$n//\beta$，则 $m\perp n$

17.（2021 淄博三模 9）已知正四棱台的上底面边长为 1，侧棱长为 2，高为 $\sqrt{2}$，则（　　）

A．棱台的侧面积为 $8\sqrt{3}$

B．棱台的体积为 $13\sqrt{2}$

C．棱台的侧棱与底面所成的角 $\dfrac{\pi}{4}$

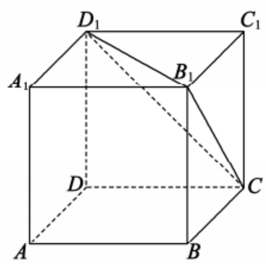
D．棱台的侧面与底面所成二面角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

18.（2021 滨州二模 12）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折到 $\triangle ACD'$ 的位置，得到四面体 $D'-ABC$ ，在翻折过程中，点 D' 始终位于 $\triangle ABC$ 所在平面的同一侧，且 BD' 的最小值为 $\sqrt{2}$ ，则下列结论正确的是

A. 四面体 $D'-ABC$ 的外接球的表面积为 8π　　B. 四面体 $D'-ABC$ 体积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C. 点 D 的运动轨迹的长度为 $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$　　D. 边 AD 旋转所形成的曲面的面积为 $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

19.（2021 枣庄二模 12）如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 是 $\triangle B_1CD_1$ 内部（不包括边界）的动点．若 $BD\perp AP$，则线段 AP 长度的可能取值为



A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{6}{5}$

C．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

20.（2021 聊城三模 12）已知等边三角形 ABC 的边长为 6，M，N 分别为 AB，AC 的中点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 折起至 $\triangle A'MN$，在四棱锥 $A'-MNCB$ 中，下列说法正确的是（　　）

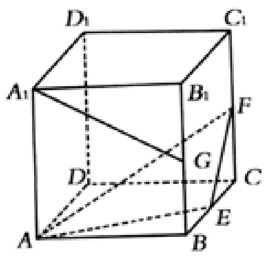
A. 直线 $MN//$ 平面 $A'BC$

B. 当四棱锥 $A'-MNCB$ 体积最大时，二面角 $A'-MN-B$ 为直二面角

C. 在折起过程中存在某位置使 $BN\perp$ 平面 $A'NC$

D. 当四棱 $A'-MNCB$ 体积最大时，它的各顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为 39π

21.（2021 泰安二模 11）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别为 BC，CC_1，BB_1 的中点，则（　　）



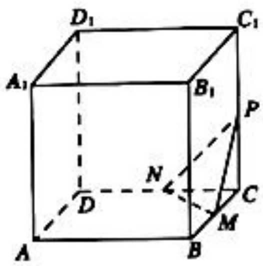
A. $D_1D\perp AF$

B. $A_1G//$ 平面 AEF

C. $\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=0$

D. 向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 与向量 $\overrightarrow{AD_1}$ 的夹角是 60°

22.（2021 聊城二模 11）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P，M，N 分别为棱 CC_1，CB，CD 上的动点（点 P 不与点 C，C_1 重合），若 $CP=CM=CN$，则下列说法正确的是（　　）



A. 存在点 P，使得点 A_1 到平面 PMN 的距离为 $\dfrac{4}{3}$

B. 用过 P，M，D_1 三点的平面去截正方体，得到的截面一定是梯形

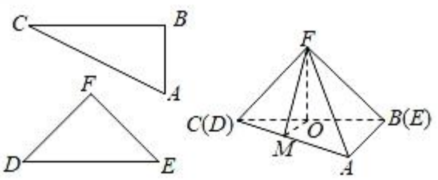
C. $BD_1//$ 平面 PMN

D. 用平行于平面 PMN 的平面 α 去截正方体，得到的截面为六边形时，该六边形周长一定为 $3\sqrt{2}$

23.（2021 潍坊四县 5 月联考 12）一副三角板由一块有一个内角为 60° 的直角三角形和一块等腰直角三角形组成，如图所示，$\angle B=\angle F=90°$，$\angle A=60°$，$\angle D=45°$，$BC=DE=\sqrt{3}$，现将两块三角形板拼接在一起，得三棱锥 $F-ABC$，取 BC 中点 O 与 AC 中点 M，则下列判断中正确的是（　　）

A. $BC\perp$ 面 OFM

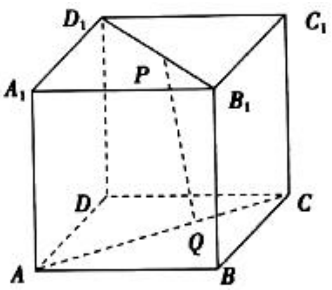
B. AC 与面 OFM 所成的角为定值



C. 三棱锥 $F-COM$ 体积为定值

D. 若平面 $BCF\perp$ 平面 ABC，则三棱锥 $F-ABC$ 外接球体积为 $\dfrac{4}{3}\pi$

24.（2021 省实验中学二模 11）如图所示，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q 分别是线段 B_1D_1，AC 上的动点，则下列说法正确的有（　　）



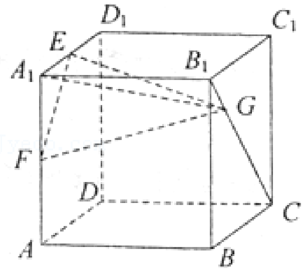
A．线段 PQ 长度的最小值为 2

B．满足 $PQ=2\sqrt{2}$ 的情况只有 4 种

C．无论 P，Q 如何运动，直线 PQ 都不可能与 BD_1 垂直

D．三棱锥 $P-ABQ$ 的体积大小只与点 Q 的位置有关，与点 P 的位置无关

25.（2021 烟台适应性练习一 11）如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 A_1D_1，AA_1 的中点，G 为面对角线 B_1C 上一个动点，则（　　）



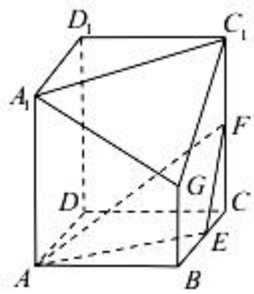
A．三棱锥 A_1-EFG 的体积为定值 $\frac{1}{3}$

B．存在 $G\in$ 线段 B_1C，使平面 $EFG//$ 平面 BDC_1

C．G 为 B_1C 中点时，直线 EG 与 BC_1 所成角最小

D．三棱锥 A_1-EFG 外接球半径的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

26.（2021 青岛三模 12）在如图所示的几何体中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，AA_1，BG，CC_1，DD_1 均与底面 $ABCD$ 垂直，且 $AA_1=CC_1=DD_1=2BG=4\sqrt{3}$，点 E，F 分别为线段 BC，CC_1 的中点，则下列说法正确的是（　　）



A．直线 A_1G 与△AEF 所在平面相交

B．三棱锥 C_1-BCD 的外接球的表面积为 80π

C．点 C 到平面 AEF 的距离为 $\frac{4\sqrt{57}}{19}$

D．二面角 C_1-AD-B 中，$M\in$ 平面 C_1AD，$N\in$ 平面 BAD，P，Q 为棱 AD 上不同两点，$MP\perp AD$，$NQ\perp AD$，若 $MP=PQ=2$，$NQ=1$，则 $MN=\sqrt{3}$

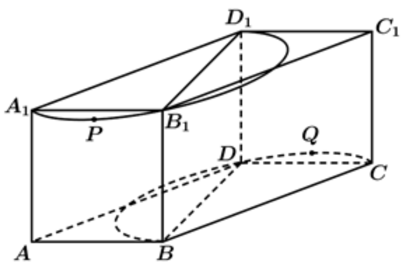
27.（2021 济宁二模 12）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$AB=AA_1=\frac{1}{2}AD=1$，$\angle BAD=60°$，点 P 是半圆弧 $\overset{\frown}{A_1D_1}$ 上的动点（不包括端点），点 Q 是半圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的动点（不包括端点），则下列说法止确的是（ ）

A． 四面体 $PBCQ$ 的体积是定值

B． $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围是 $(0,4)$

C． 若 C_1Q 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ，则 $\tan\theta>\frac{1}{2}$

D． 若三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球表面积为 S，则 $S\in[4\pi,13\pi)$

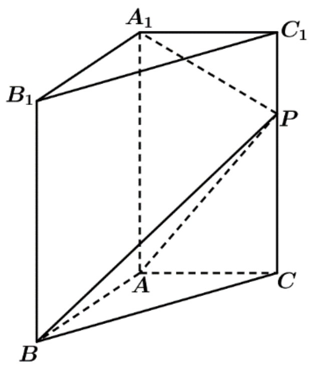


三、填空题

28.（2021 济南二模 15）一个圆锥的侧面积是其底面积的 2 倍，则该圆锥的母线与底面所成的角为_______．

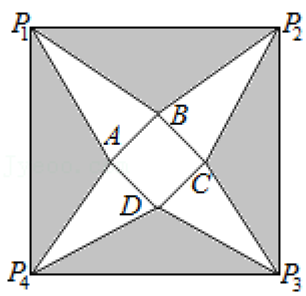
29.（2021 菏泽二模 15）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，若侧面 BCC_1B_1（含边界）内动点 P 满足 $BP=2PC$，则线段 DP 长度的最大值为 ________．

30.（2021 烟台三模 16）我国古代数学名著《九章算术》中，将底面是直角三角形 直棱柱称之为“堑堵”，如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为一个“堑堵”，底面 $\triangle ABC$ 中，$AB\perp AC$，且 $AB=AC=2$，$AA_1=4$，点 P 在棱 CC_1 上，当 $A_1P\perp BP$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 ______.

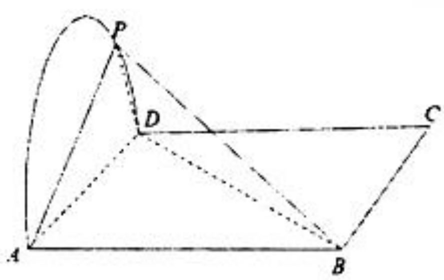


31.（2021 德州二模 16）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 M 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90°$，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为________，球 M 的表面积为________.

32.（2021 青岛二模 16）某校学生去工厂进行劳动实践，加工制作某种零件．如图，将边长为$10\sqrt{2}cm$ 正方形铁皮剪掉阴影部分四个全等的等腰三角形，然后将$\triangle P_1AB$，$\triangle P_2BC$，$\triangle P_3CD$，$\triangle P_4DA$ 分别沿 AB，BC，CD，DA 翻折，使得 P_1，P_2，P_3，P_4 重合并记为点 P，制成正四棱锥 $P-ABCD$ 形状的零件．当该四棱锥体积最大时，AB=________cm；此时该四棱锥外接球的表面积 S=______cm^2.

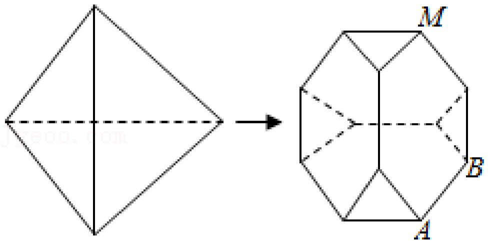


33.（2021 烟台适应性练习二 16）在一次综合实践活动中，某手工制作小组利用硬纸板做了一个如图所示的几何模型，底面 $ABCD$ 为边长是 4 的正方形，半圆面 $APD\perp$ 底面 $ABCD$. 经研究发现，当点 P 在半圆弧 $\overset{\frown}{AD}$ 上（不含 A，D 点）运动时，三棱锥 $P-ABD$ 的外接球始终保持不变，则该外接球的表面积为________.



34.（2021 临沂二模 16）如图，将正四面体每条棱三等分，截去顶角所在的小正四面体，余下的多面体就成

为一个半正多面体，亦称“阿基米德体”．点 A，B，M是该多面体的三个顶点，点 N是该多面体表面上的动点，且总满足 $MN\perp AB$，若 $AB=4$，则该多面体的表面积为 ________，点 N轨迹的长度为 ________．

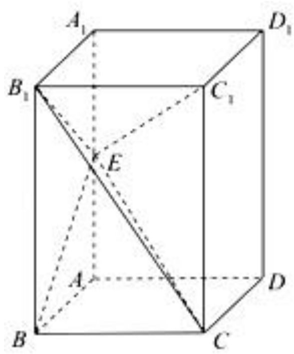


四、解答题

35.（2021 青岛三模 17）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面是边长为 1 的正方形，点 E在 AA_1上，且 $BE\perp EC_1$．

（1）证明：平面 $BCE\perp$平面 B_1C_1E；

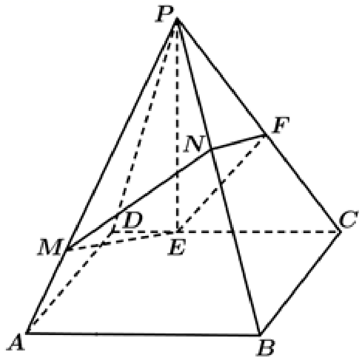
（2）若 $AE=A_1E$，求二面角 C_1-B_1E-C的余弦值．



36.（2021 德州二模 19）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形且 $AB=4$ ， $BC=3$ ，点 P 在底面上的射影为线段 DC 上一点 E ，$PE=EC$ ，且 $DE=1$ ，M 为 AP 上的一点且 $AM:MP=1:3$ ，过 E 、 M 做平面交 PB 于点 N ， PC 于点 F 且 F 为 PC 的中点.

（1）证明： $ME//$ 平面 PBC ；

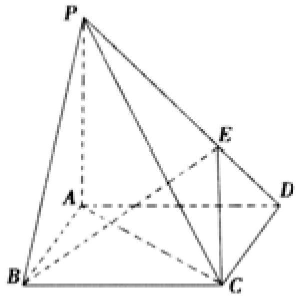
（2）求平面 PAD 与平面 $EMNF$ 所成角的余弦值.



37..（2021 泰安二模 19）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$PA\perp CD$，$PA=1$，$PD=\sqrt{2}$，E 为 PD 上一点，且 $PE=2ED$.

（1）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$;

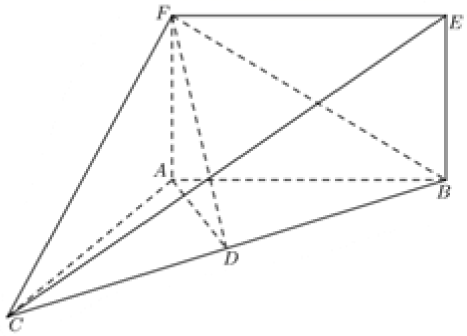
（2）求二面角 $P-CE-B$ 的余弦值.



38.（2021 济宁二模 20）20. 如图，四边形 $ABEF$ 是矩形，平面 $ABC\perp$ 平面 $ABEF$ ， D 为 BC 中点，$\angle CAB=120^{\circ}$ ， $AB=AC=4$ ， $AF=\sqrt{6}$.

（1）证明：平面 $ADF\perp$ 平面 BCF ；

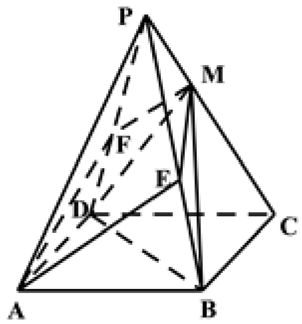
（2）求二面角 $F-AD-E$ 的余弦值.



39.（2021 淄博二模 19）如图所示，已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle BAD=60^{\circ}$ ，侧棱 $PA=PC=3$ ， $PB=PD$ ，过点 A 的平面与侧棱 PB ， PD ， PC 相交于点 E ， F ， M ，且满足 $PE=PF$ ， $PM=1$.

（1）求证：直线 $PC\perp$ 平面 $AEMF$ ；

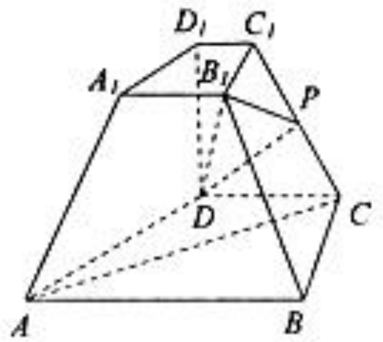
（2）求平面 MDB 与平面 $AEMF$ 所成二面角的正弦值.



40.（2021 烟台适应性练习二 19）如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB/\!/CD$，$AB\perp BC$，$DD_1\perp$底面 $ABCD$，$AB=2BC=2CD=2DD_1=4D_1C_1$，P 为棱 CC_1 的中点.

（1）证明：$AC/\!/$平面 B_1DP；

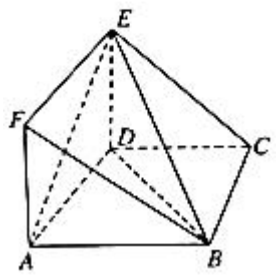
（2）求二面角 B_1-DP-C 的余弦值.



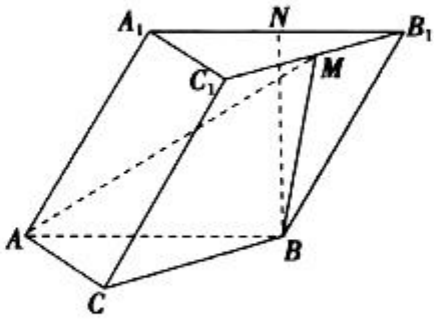
41.（2021 潍坊四县 5 月联考 20）已知多面体 $EF-ABCD$ 中，$ADEF$ 为正方形，平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$，$AB/\!/CD$，$BC\perp CD$，$AB=\sqrt{5}$，$BC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$BD=2$.

（1）证明：$AE\perp BF$；

（2）求平面 BEF 与平面 BCE 所成锐二面角的余弦值.



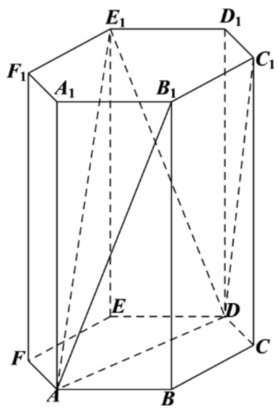
42.（2021 省实验中学二模 19）如图，已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，点 M，N 分别是 B_1C_1 和 A_1B_1 的中点，$AA_1=AB=BM=2$，$\angle A_1AB=60°$．



（1）求证：$BN\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）求二面角 $M-AB-C$ 的余弦值．

43.（2021 烟台三模 19）19．在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，$AA_1=2AB=2$．



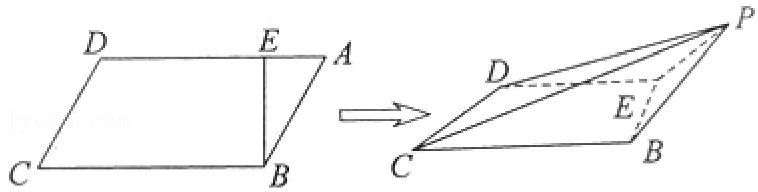
（1）求 BC 到平面 ADC_1B_1 的距离；

（2）求二面角 B_1-AD-E_1 的余弦值.

44.（2021 烟台适应性练习一 18）已知平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle C=60°$，点 E 在 AD 上，且满足 $BC=2AB=4AE=4$，将△ABE 沿 BE 折起至△PBE 的位置，得到四棱锥 $P-BCDE$.

（1）求证：平面 $PDE\perp$ 平面 $BCDE$;

（2）若二面角 $P-BE-D$ 的大小为 120°，求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



45.（2021 淄博三模 18）在图 1 所示的平面图形 $ABCD$ 中，△ABD 是边长为 4 的等边三角形，BD 是 $\angle ADC$ 的平分线，且 $BD\perp BC$，M 为 AD 的中点，以 BM 为折痕将△ABM 折起得到四棱锥 $A-BCDM$（如图 2）.

（1）设平面 ABC 和 ADM 的交线为 l，在四棱锥 $A-BCDM$ 的棱 AC 上求一点 N，使直线 $BN//l$;

（2）若二面角 $A-BM-D$ 的大小为 60°，求平面 ABD 和 ACD 所成锐二面角的余弦值.

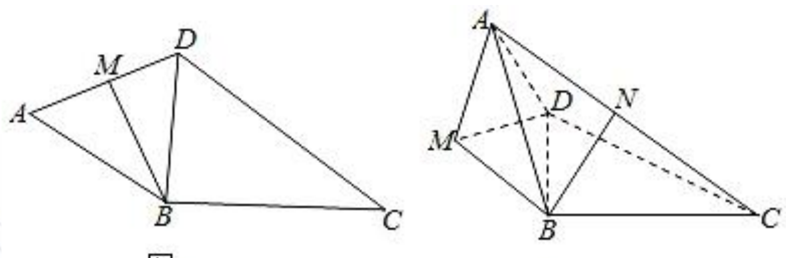
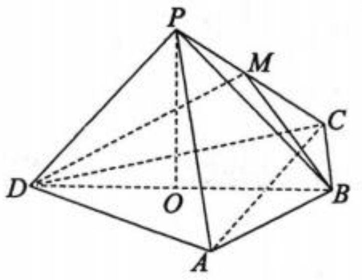


图1　　图2

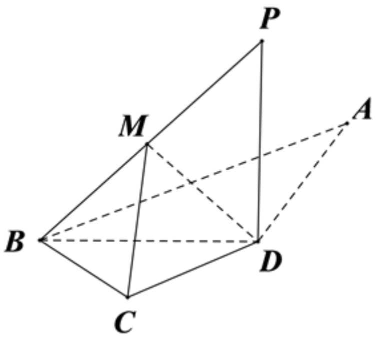
46.（2021 滨州二模 20）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，O 是 BD 的中点，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle DAB=\angle BCD=90^{\circ}$，$AD=AC=CD=2\sqrt{3}$，$DP=\sqrt{6}$.



（1）求证：平面 $ADP\perp$ 平面 APC；

（2）设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}\left(0<\lambda<1\right)$，若二面角 $B-DM-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$，求 λ 的值.

47.（2021 聊城三模 19）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$BC=CD$，$BC\perp CD$，$AD\perp BD$，以 BD 为折痕把 $\triangle ABD$ 折起，使点 A 到达点 P 的位置，且 $PC\perp BC$．



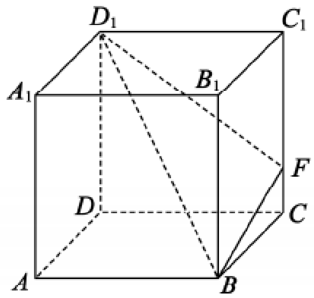
（1）证明：$PD\perp CD$；

（2）若 M 为 PB 的中点，二面角 $P-BC-D$ 的大小为 60°，求直线 PC 与平面 MCD 所成角的正弦值.

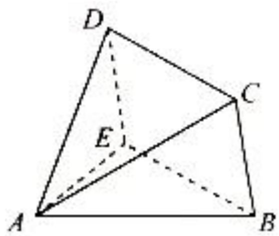
48.（2021 枣庄二模 19）如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 F 在棱 CC_1 上，过 B，D_1，F 三点的正方体的截面 α 与直线 AA_1 交于点 E.

（1）找到点 E 的位置，作出截面 α（保留作图痕迹），并说明理由；

（2）已知 CF＝a，求 α 将正方体分割所成的上半部分的体积 V_1 与下半部分的体积 V_2 之比.



49.（2021 日照二模 20）如图，在多面体 $ABCDE$ 中，四边形 $BCDE$ 是矩形，$\triangle ADE$ 为等腰直角三角形，且 $\angle ADE=90°$，$\frac{1}{2}AB=AD=\sqrt{2}$，$BE=2$.



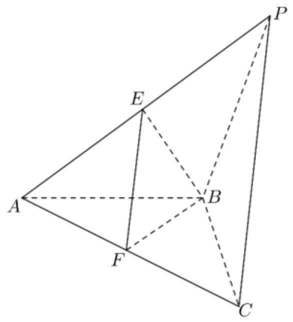
（1）求证：平面 $ADE\perp$ 平面 ABE;

（2）线段 CD 上存在点 P，使得二面角 $P-AE-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$，试确定点 P 的位置并证明.

50.（2021 潍坊三模 19） 如图，已知$\triangle ABC$是以AC为底边的等腰三角形，将$\triangle ABC$绕AB转动到$\triangle PAB$位置，使得平面$PAB\perp$平面ABC，连接PC，E，F分别是PA，CA的中点.

（1）证明：$EF\perp AB$；

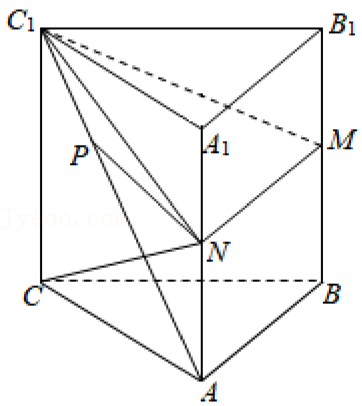
（2）在①$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，②点$P$到平面$ABC$的距离为 3，③直线$PB$与平面$ABC$所成的角为 60° 这三个条件中选择两个作为已知条件，求二面角$E-BF-A$的余弦值.



51.（2021 青岛二模 18）如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面三角形ABC为直角三角形，其中$AB\perp AC$，$AB=3$，$AC=4$，$CC_1=8$，M，N分别为BB_1和AA_1的中点.

（1）求证：$CN\perp$平面C_1MN；

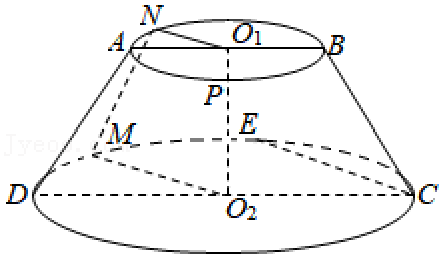
（2）当点P在线段C_1A上移动时，求直线NP与平面BB_1C_1C所成角正弦的最大值.



52.（2021 日照三模 18）已知圆台 O_1O_2，轴截面 $ABCD$，圆台的上底面圆半径与高相等，下底面圆半径为高的两倍，点 E 为下底圆弧$\overset{\frown}{CD}$的中点，点 N 为上底圆周上靠近点 A 的$\overset{\frown}{AB}$的四等分点，经过 O_1，O_2，N 三点的平面与弧$\overset{\frown}{CD}$交于点 M，且 E，M，N 三点在平面 $ABCD$ 的同侧．

（Ⅰ）判断平面 O_1O_2MN 与直线 CE 的位置关系，并证明你的结论；

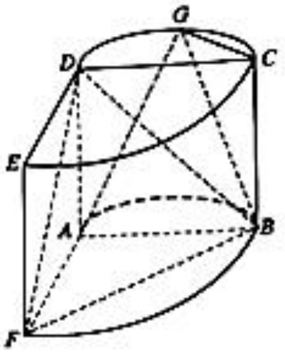
（Ⅱ）P 为上底圆周上的一个动点，当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大时，求异面直线 CP 与 DB 所成角的余弦值．



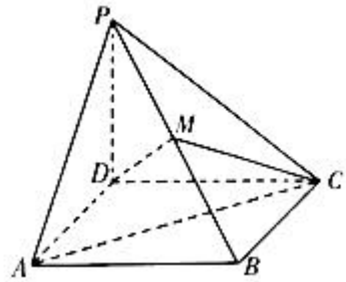
53.（2021 聊城二模 20）20．如图所示的几何体是由等高的半个圆柱和$\frac{1}{4}$个圆柱拼接而成，点 G 为弧$\overset{\frown}{CD}$的中点，且 C、E、D、G 四点共面．

（1）证明：平面 $BFD\perp$ 平面 BCG;

（2）若平面 BDF 与平面 ABG 所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$，求直线 DF 与平面 ABF 所成角的大小．



54.（2021 潍坊二模 19）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=CD=1$，PA 与平面 $ABCD$ 所成角为 30°，M 为 PB 上一点且 $CM\perp PA$.



（1）证明：$PA\perp DM$；

（2）设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l，在 l 上取点 N 使 $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{DA}$，$Q$ 为线段 PN 上一动点，求平面 ACQ 与平面 PDC 所成二面角的余弦值的最大值.

55.（2021 济南二模 19）如图 1，在等腰梯形 $ABCD$ 中，E 为 CD 的中点，$AB=BC=CE$，将△ADE，△BCE 分别沿 AE，BE 折起，使平面 $ADE\perp$ 平面 ABE，平面 $BCE\perp$ 平面 ABE，得到图 2.

（1）证明：$AB// CD$；

（2）记平面 ADE 与平面 BCE 的交线为 l，求二面角 $D-l-C$ 的大小.

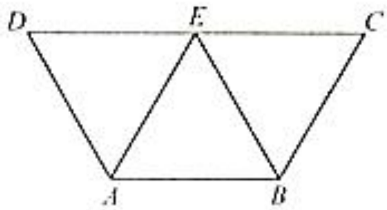


图1

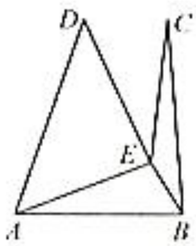
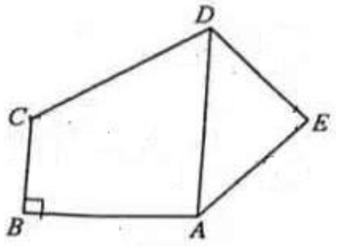


图2

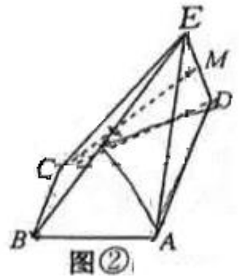
56.（2021 菏泽二模 19）如图①所示，平面五边形 $ABCDE$ 中，四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle B = 90^\circ$ 且 $AD // BC$，若 $AD = 2BC = 2$，$AB = \sqrt{3}$，$\triangle ADE$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，现将 $\triangle ADE$ 沿 AD 折起，连接 EB，EC 得如图②的几何体.

（1）若点 M 是 ED 的中点，求证: $CM//$ 平面 ABE;

（2）若 $EC = 2$，在棱 EB 上是否存在点 F，使得二面角 $E - AD - F$ 的大小为 60°？若存在，求出点 F 的位置；若不存在，请说明理由.



图①

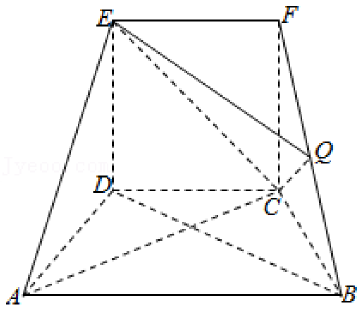


图②

57.（2021 临沂二模 20）如图，四边形 $CDEF$ 为正方形，$AB // CD$，$AB=2BC=2CD$，点 Q 为 BF 的中点.

（1）求证：$BD //$ 平面 CEQ;

（2）若 $\angle BAC=30^\circ$，$AC \perp BF$，求平面 CEQ 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值.



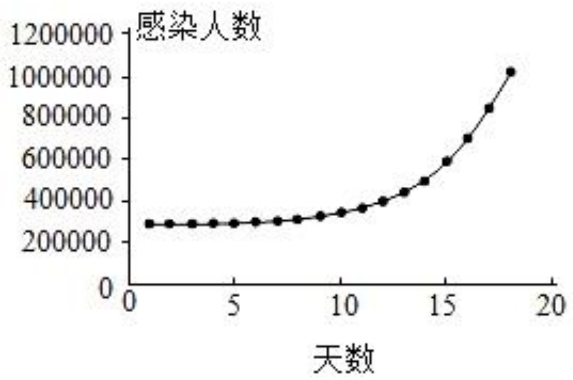
专题八　函数与导数

一、　单项选择题

1. （2021 日照三模 2）已知幂函数 $y=x^a$ 的图象经过点（2，4），则 $f(-3)=$（　　）

A．-9　　B．9　　C．3　　D．-3

2. （2021 淄博三模 2）某个国家某种病毒传播的中期，感染人数 y 和时间 x（单位：天）在 18 天里的散点图如图所示，下面四个回归方程类型中最适宜作为感染人数 y 和时间 x 的回归方程的是（　　）



A．$y=a+bx$　　B．$y=a+be^x$　　C．$y=a+b\ln x$　　D．$y=a+b\sqrt{x}$

3. （2021 枣庄二模 3）已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x+\ln 2}, & x\le 0 \\ f(x-3), & x>0 \end{cases}$，则 $f(2021)=$

A．$\dfrac{2}{e}$　　B．$2e$　　C．$\dfrac{2}{e^2}$　　D．$2e^2$

4. （2021 临沂二模 2）已知奇函数 $f(x)=\begin{cases} x^3-1, & x<0 \\ g(x), & x>0 \end{cases}$，则 $f(-1)+g(2)=$（　　）

A．-11　　B．-7　　C．7　　D．11

5. （2021 潍坊四县 5 月联考 3）已知函数 $f(x)=\begin{cases} 3^{-x}+1 & (x\le 0) \\ x^a+2 & (x>0) \end{cases}$，若 $f(f(-1))=18$，那么实数 a 的值是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

6. （2021 省实验中学二模 3）设 $a=5^{0.3}$，$b=\log_{0.3}0.5$，$c=\log_3 0.4$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

7. （2021 泰安二模 4）已知 $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-0.8}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{3}$，$c=4^{0.3}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$

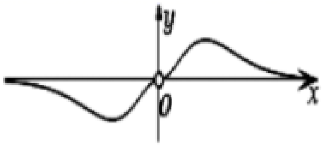
8.（2021 青岛三模 5）已知 $1<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$M=a^a$，$N=a^b$，$P=b^a$，则 M，N，P 的大小关系正确的为（　　）

A．$N<M<P$　　B．$P<M<N$　　C．$M<P<N$　　D．$P<N<M$

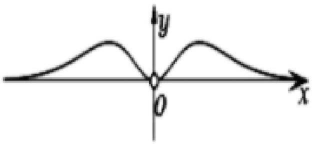
9.（2021 日照二模 6）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x+x$，则 $a=f(-2\frac{3}{2})$，$b=f(\log_2 9)$，$c=f(\sqrt{5})$ 的大小关系为（　　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$b>c>a$　　D．$b>a>c$

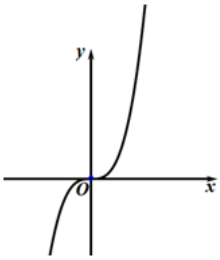
10.（2021 聊城三模 3）函数 $f(x)=\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}$ 的图象大致为（　　）



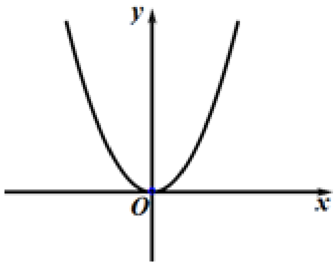
A.



B.

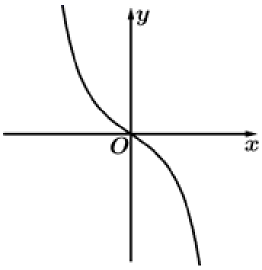


C.

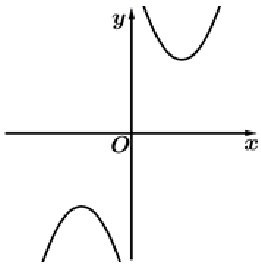


D.

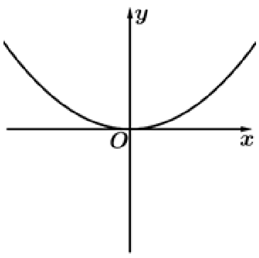
11.（2021 淄博二模 5）函数 $f(x)=(e^x+e^{-x})\tan x$ 的部分图像大致为（　　）.



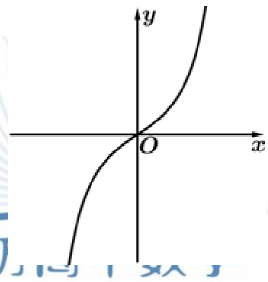
A.



B.

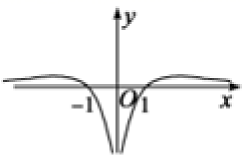


C.

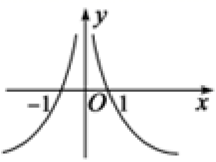


D.

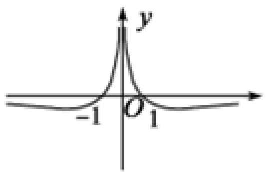
12.（2021 德州二模 5）函数 $f(x)=\frac{2^{x+1}\cdot\ln|x|}{4^x+1}$ 的部分图像大致为（　　）.



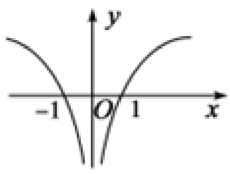
A.



B.

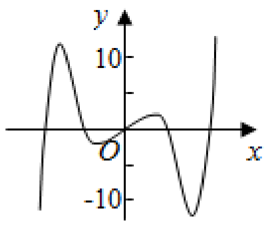


C.

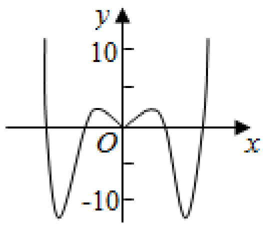


D.

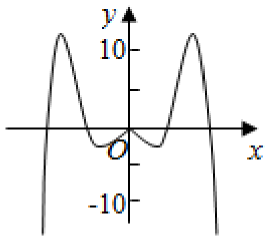
13.（2021 泰安二模 6）函数 $y=(e^x-e^{-x})\sin|2x|$ 的图象可能是（　　）



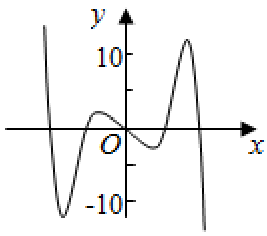
A.



B.



C.



D.

14.（2021 潍坊三模 6）某地区为落实乡村振兴战略，帮助农民脱贫致富，引入一种特色农产品种植，该农产品上市时间仅能维持 5 个月，预测上市初期和后期会因产品供应不足使价格持续上涨，而中期又将出现供大于求使价格连续下跌．经研究其价格模拟函数为 $f(t)=t(t-3)^2+n$，（$0\le t\le 5$，其中 $t=0$ 表示 5 月 1 日，$t=1$ 表示 6 月 1 日，以此类推）．若 $f(2)=6$，为保护农户的经济效应，当地政府计划在价格下跌时积极拓宽外销，请你预测该农产品价格下跌的月份为（　　）

A．5 月和 6 月　　B．6 月和 7 月　　C．7 月和 8 月　　D．8 月和 9 月

15.（2021 济宁二模 7）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1+2\ln x, x>1\\ 1-2\ln x, 0<x\le 1\end{cases}$，若 $f(a)=f(b)$，则 $a+b$ 的最小值是（　　）

A．$2\sqrt{e}$　　B．e　　C．$1+e$　　D．$2e$

16.（2021 菏泽二模 8）已知 a，b，$c\in(0,3)$，且 $a^5=5^a, b^4=4^b, c^3=3^c$，下列不等式正确的是

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

17.（2021 烟台三模 8）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(\pi+x)=f(-x)$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-\pi x+\pi}$，则下列结论正确的是（　　）

A．π 是函数 $f(x)$ 的周期

B. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 2

C. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D. 方程 $f\left(x\right)-\frac{1}{2}=0$ 在 $x\in\left(-10,10\right)$ 上的所有实根之和为 3π

18.（2021 滨州二模 4）设曲线 $y=e^{2ax}$（e=2.718…为自然对数的底数）在点（0，1）处的切线及直线 $2x-y-1=0$ 和两坐标轴的正半轴所围成的四边形有外接圆，则 a=（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 1

19.（2021 潍坊二模 6）关于函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & 0\leqslant x<2\\ b-x, & x\geqslant 2\end{cases}$，其中 a，b∈R，给出下列四个结论：

甲：6 是该函数的零点；

乙：4 是该函数的零点；

丙：该函数的零点之积为 0；

丁：方程 $f(x)=\frac{5}{2}$ 有两个根.

若上述四个结论中有且只有一个结论错误，则该错误结论是（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

20.（2021 青岛二模 7）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图象连续不断，有下列四个命题：

甲：$f(x)$ 是奇函数；

乙：$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称；

丙：$f(x)$ 在区间[－1，1]上单调递减；

丁：函数 $f(x)$ 的周期为 2.

如果只有一个假命题，则该命题是（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

21.（2021 临沂二模 6）在天文学上恒星的亮度一般用星等来表示，直接测量到的天体亮度被称为视星等 m，而把天体置于 10 秒差距的距离处所得到的视星等称为绝对星等 M，它能反映天体的发光本领．如果我们观测到了恒星的光谱，可以知道一些类型恒星的绝对星等，就可以利用光谱视差法来获得这些恒星的距离．如表是某校天文爱好者社团在网上收集到一些恒星的相关数据，那么最适合作为星等差 y 关于距离 x（光年）的回归方程类型的是（　　）

星名	天狼星	南河三	织女星	大角星	五车二	水委一	老人星	参宿四
距离 x	8.6	11.46	25	36.71	42.8	139.44	309.15	497.95
$y=m-M$	-2.80	-2.27	-0.57	0.26	0.59	3.15	4.88	5.92

A．$y=a+bx^2$　　B．$y=a+b\lg x$　　C．$y=a+b\sqrt{x}$　　D．$y=a+bx$

22.（2021 济南二模 7）苏格兰数学家纳皮尔发明了对数表，这一发明为当时天文学家处理“大数运算”提供了巨大的便利．已知正整数 N 的 31 次方是一个 35 位数，则由下面的对数表，可得 N 的值为（　　）

M	2	3	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17
$\lg M$	0.30	0.48	0.78	0.85	0.90	0.95	1.04	1.08	1.11	1.15	1.18	1.20	1.23

A．12　　B．13　　C．14　　D．15

23.（2021 青岛三模 8）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 的图象连续不断，其导函数为 $f'(x)$，对任意正实数 x 恒有 $xf'(x)>2f(-x)$，若 $g(x)=x^2f(x)$，则不等式 $g(\log_3(x^2-1))+g(-1)<0$ 的解集是（　　）

A．$(0,2)$　　B．$(-2,2)$

C．$(-\sqrt{3},2)$　　D．$(-2,-1)\cup(1,2)$

24.（2021 滨州二模 7）已知$a=\frac{ln2}{2}$，$b=\frac{1}{e}$（$e=2.718\cdots$为自然对数的底数），$c=\frac{2ln3}{9}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$b>a>c$　　D．$b>c>a$

25.（2021 潍坊四县 5 月联考 8）关于函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$的性质，以下说法正确的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 的周期是 2π　　B．函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有极值

C．函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减　　D．函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有最小值

26.（2021 烟台适应性练习二 7）已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}, & 0<x\leqslant 2\\ f(x-2)-1, & x>2\end{cases}$，则方程 $f(x)+\frac{1}{8}x^2=2$ 根的个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

27.（2021 省实验中学二模 8）中国科学院院士吴文俊在研究中国古代数学家刘徽著作的基础上，把刘徽常用的方法概括为“出入相补原理”：一个图形不论是平面的还是立体的，都可以切割成有限多块，这有限多块经过移动再组合成另一个图形，则后一图形的面积或体积保持不变．利用这个原理，解决下面问

题：已知函数 $f(x)$满足 $f(4-x)=f(x)$，且当 $x\in[0,2]$时的解析式为 $f(x)=\begin{cases}-\log_2(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \log_2 x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，

则函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[0，4]$时的图象与直线 $y=-1$ 围成封闭图形的面积是（　　）

A．2　　B．$2\log_2 3$　　C．4　　D．$4\log_2 3$

28.（2021 德州二模 8）已知定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且满足 $f(-1)=-2$，则关于 x 的不等式 $f(x)<\frac{2}{x}+\sin\pi x$ 的解集为（　　　）.

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

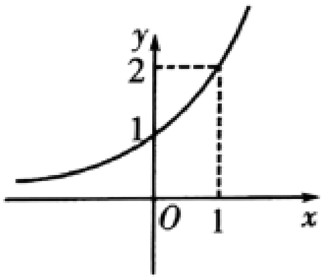
C．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

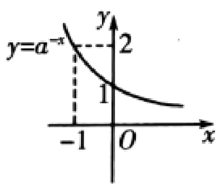
29.（2021 烟台适应性练习一 8）若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(-x)，x<0\\ 2^x+2^{1-x}-a，x\geq 0\end{cases}$ 的所有零点之和为 0，则实数 a 的取值范围为（　　）

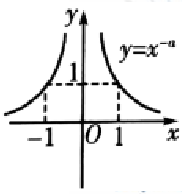
A．$(2\sqrt{2}，3]$　　B．$[2\sqrt{2}，3]$　　C．$(2\sqrt{2}，+\infty)$　　D．$[2\sqrt{2}，+\infty)$

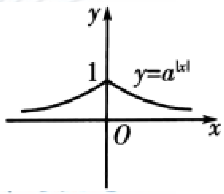
二、　多项选择题

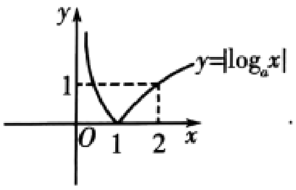
30.（2021 潍坊三模 9）已知函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象如下图所示，则下列四个函数图象与函数解析式对应正确的是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

31.（2021 潍坊二模 9）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$，且在$[0，2]$上是增函数，下面判断正确的是（　　）

A．$f(x)$ 的周期是 4　　B．$f(2)$ 是函数的最大值

C．$f(x)$ 的图象关于点（-2，0）对称　　D．$f(x)$ 在$[2，6]$上是减函数

32. （2021 临沂二模 11）若 $a=\log_5 2$，$b=\frac{1}{2}ln2$，$c=\frac{1}{5}ln5$，则（　　）

A．$a>b$　　B．$b>c$　　C．$c>a$　　D．$a>2b$

33. （2021 济南二模 10）已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$ 为奇函数　　B．$f(x)$ 为减函数

C．$f(x)$ 有且只有一个零点　　D．$f(x)$ 的值域为 $[-1,1)$

34. （2021 淄博二模 11）已知 e 是自然对数的底数，则下列不等关系中不正确的是（　　）.

A．$\ln 2>\frac{2}{e}$　　B．$\ln 3<\frac{3}{e}$　　C．$\ln\pi>\frac{\pi}{e}$　　D．$\frac{\ln 3}{\ln\pi}<\frac{3}{\pi}$

35. （2021 菏泽二模 10）已知 $a>b>0.a+b=1$，则下列结论正确的有

A. $a+\sqrt{2b}$ 的最大能为$\frac{3}{2}$　　B. $2^{2a}+2^{2b+1}$的最小值为$4\sqrt{2}$

C. $a+\sin b<1$　　D. $b+1na>0$

36.（2021 济宁二模 11）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，$f(1-x)=-f(1+x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2+x-2$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数

B．$f(2018)+f(2021)=-2$

C．函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象有且仅有 3 个交点

D．当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=x^2-9x+18$

37. （2021 菏泽二模 12）已知函数 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{e^x+e^{1-x}}$，则下列结论正确的有

A. 函数 $f(x)$ 是周期函数　　B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$对称

C. 函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上先减后增　　D. 函数 $f(x)$ 既有最大值又有最小值

38. （2021 聊城二模 12）用符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如：$[0.6]=0$，$[2.3]=2$．设 $f(x)=(1-lnx)(ax^2+2lnx)$ 有 3 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，则（　　）

A．$x=e$ 是 $f(x)$ 的一个零点

B．$x_1+x_2+x_3=2\sqrt{e}+e$

C．a 的取值范围是 $(-\frac{1}{e},0)$

D．若 $[x_1]+[x_2]+[x_3]=6$，则 a 的范围是 $[-\frac{2\ln 3}{9},-\frac{\ln 2}{4})$

39.（2021 泰安二模 12）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x}, & x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=kx-k$，则（　　）

A．$f(x)$ 在 R 上为增函数

B．当 $k=\frac{1}{4}$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 有且只有 3 个不同实根

C．$f(x)$ 的值域为 $(-1,+\infty)$

D．若 $(x-1)(f(x)-g(x))\leqslant 0$，则 $k\in[1,+\infty)$

40.（2021 德州二模 12）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则（　　　　）．

A．$f(2)>f(5)$

B．若 $f(x)=m$ 有两个不相等的实根 x_1、x_2，则 $x_1x_2<e^2$

C．$\ln 2>\sqrt{\frac{2}{e}}$

D．若 $2^x=3^y$，x，y 均为正数，则 $2x>3y$

41.（2021 青岛二模 12）已知函数 $f(x)=x\cos x+\sin x$ 在区间 $(-n\pi,n\pi)$（$n\in N^*$）上的零点个数为 a_n，函数 $f(x)$ 在区间 $(-n\pi,n\pi)$（$n\in N^*$）上的所有零点的和记为 b_n．则下述正确的是（　　）

A．$b_n=0$

B．$\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2+2n$

C．$f(x)$ 在区间 $(-n\pi,n\pi)$ 上任意两零点的差大于 $\frac{\pi}{2}$

D．$f(x)$ 在区间 $(-n\pi,n\pi)$ 上任意两相邻零点的差大于 π

三、填空题

42.（2021 日照二模 13）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{6}, & x\leqslant 0\\ \log_3 x, & x>0\end{cases}$，则 $f(f(\frac{1}{3}))=$______．

43.（2021 烟台适应性练习一 14）已知曲线 $f(x)=\sin 2x$ 在 $x=\pi$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\cos 2\alpha$ 的值为____．

44.（2021 聊城三模 14）曲线 $y=e^x+x^2-\frac{2}{3}x$ 在 $x=0$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=$________．

45.（2021 菏泽二模 13）写出一个同时满足下列两个条件的非常数函数 ________

①当 $x_1x_2\geq 0$ 时，$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$；②$f(x)$ 为偶函数

46.（2021 淄博三模 13）请写出一个函数 $f(x)=$________，使之同时具有如下性质：①$\forall x\in R$，$f(x)=f(4-x)$，②$\forall x\in R$，$f(x+4)=f(x)$．

47.（2021 潍坊四县 5 月联考 13）写出一个满足 $f(x)=f(2-x)$ 的奇函数 $f(x)=$________.

48.（2021 枣庄二模 15）写出一个图象关于直线 $x=2$ 对称且在 $[0,2]$ 上单调递增的偶函数 $f(x)=$________.

49.（2021 聊城二模 15）请你举出与函数 $f(x)=e^{2x}-1$ 在 $(0,0)$ 处具有相同切线的一个函数________.

50.（2021 潍坊三模 14）设函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\le 1,\\ (x-1)^2+1, x>1,\end{cases}$ 则不等式 $f(1-|x|)+f(2)>0$ 的解集为___.

51.（2021 滨州二模 15）某同学设想用“高个子系数 k”来刻画成年男子的高个子的程度，他认为，成年男子身高 160cm 及其以下不算高个子，其高个子系数 k 应为 0；身高 190cm 及其以上的是理所当然的高个子，其高个子系数 k 应为 1，请给出一个符合该同学想法、合理的成年男子高个子系数 k 关于身高 $x(cm)$ 的函数关系式________.

52.（2021 日照三模 16）已知 a，b，c 为正整数，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根为 x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），且 $|x_1|<1$，$|x_2|<1$，则 $a+b+c$ 的最小值为______.

53.（2021 青岛三模 16）定义方程 $f(x)=f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“新驻点”，若函数 $g(x)=\frac{1}{2}x$，$h(x)=ln2x$，$\varphi(x)=\sin x$（$0<x<\pi$）的“新驻点”分别为 α，β，γ，则 α，β，γ 的大小关系为________.

54.（2021 日照二模 16）牛顿选代法又称牛顿 - 拉夫逊方法，它是牛顿在 17 世纪提出的一种在实数集上近似求解方程根的一种方法．具体步骤如下：设 r 是函数 $y=f(x)$ 的一个零点，任意选取 x_0 作为 r 的初始近似值，过点 $(x_0, f(x_0))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_1，设 l_1 与 x 轴交点的横坐标为 x_1，并称 x_1 为 r 的 1 次近似值；过点 $(x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_2，设 l_2 与 x 轴交点的横坐标为 x_2，称 x_2 为 r 的 2 次近似值．一般的，过点 $(x_n, f(x_n))$ （$n\in N$）作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l_{n+1}，记 l_{n+1} 与 x 轴交点的横坐标为 x_{n+1}，并称 x_{n+1} 为 r 的 $n+1$ 次近似值．设 $f(x)=x^3+x-1$（$x\geq 0$）的零点为 r，取 $x_0=0$，则 r 的 2 次近似值为__$\frac{3}{4}$__；设 $a_n=\frac{3x_n^3+x_n}{2x_n^3+1}$，$n\in N^*$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n．若任意 $n\in N^*$，$T_n<\lambda$ 恒成立，则整数 λ 的最小值为________.

55.（2021 聊城三模 16）已知函数 $f(x)=(\frac{x}{e^x})^2+(a-2)\frac{x}{e^x}+2-a$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，其中 $x_1<x_2<x_3$，则 $(1-\frac{x_1}{e^{x_1}})^2(1-\frac{x_2}{e^{x_2}})(1-\frac{x_3}{e^{x_3}})$ 的值为________.

56.（2021 济南二模 16）已知函数 $f(x)=e^x-a-eln(ex+a)$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

57.（2021 济宁二模 16）设函数 $f(x)=e^x-\cos x-2a$，$g(x)=x$，若存在 x_1、$x_2\in[0,\pi]$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则 x_2-x_1 的最小值为 1 时，实数 $a=$ ________.

四、解答题

58.（2021 淄博三模 20）已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}(x>0)$.

（1）判断函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调性；

（2）证明函数 $f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 内存在唯一的极值点 x_0，且$f(x_0)<-\dfrac{2}{3\pi}$.

59.（2021 济宁二模 22）已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x$ ， $g(x)=(1-a)x\ln x-e^{x-1}$ ， $a>0$.

（1）当 $a=\frac{e}{2}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在定义域内的单调性；

（2）若 $f(x)\geq g(x)+x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

60.（2021 潍坊二模 20）已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{e^x}$ 的单调递增区间是[0，1]，极大值是$\frac{3}{e}$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点（-1，$f(-1)$）处的切线方程；

（2）若存在非零实数 x_0，使得 $f(x_0)=1$，$m>0$，求 $f(x)$ 在区间（-∞，m]上的最小值.

61.（2021 青岛三模 21）已知函数 $f(x)=x-lnx+\frac{2}{x}$.

（1）求 $f(x)$ 的最小值；

（2）若存在区间$[a, b]\subseteq[\frac{1}{2}, +\infty)$，使 $g(x)=xf(x)$ 在$[a, b]$上的值域为$[k(a+2), k(b+2)]$，求实数 k 的取值范围.

62.（2021 日照二模 22）已知函数 $f(x)=\frac{1}{6}x^3+ax\ln x-(a+\frac{1}{2})x$.

（1）若 $a\geqslant 0$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a\geqslant -1$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的极值点个数.

63.（2021 济南二模 20）已知函数 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}(n\in N_+)$.

（1）证明：$f_3(x)$ 单调递增且有唯一零点；

（2）已知 $f_{2n-1}(x)$ 单调递增且有唯一零点，判断 $f_{2n}(x)$ 的零点个数.

64.（2021 青岛二模 21）已知函数$f(x)=alnx-\sqrt{x}+1(x>0)$，$a$∈R.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若对任意 x∈（0，+∞），均有 $f(x)\leqslant 0$，求 a 的值；

（3）假设某篮球运动员每次投篮命中的概率均为 0.81，若其 10 次投篮全部命中的概率为 p，证明：$p<e^{-2}$.

65.（2021 淄博二模 21）已知函数 $f(x)=|\ln x|+ax(a<0)$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 恰好有一个零点，求 a 的取值范围.

66.（2021 枣庄二模 22）已知函数 $f(x)=a\cos x+1-e^{\frac{\pi}{2}-x}$，且 $f'(\frac{\pi}{2})=0$．

（1）求实数 a 的值，并判断 $f(x)$ 在 $(0,\ \frac{\pi}{2})$ 上的单调性；

（2）对确定的 $k\in N^{*}$，求 $f(x)$ 在 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi]$ 上的零点个数.

67.（2021 省实验中学二模 22）已知函数 $f(x)=e^{x}-ax$（$a\in R$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=2$ 时，求函数 $g(x)=f(x)-\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\ +\infty)$ 上的零点个数.

68.（2021 烟台适应性练习二 22）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}mx^2-2ax+\ln x$（$m$，$a\in\mathbb{R}$）在 $x=1$ 处的切线斜率为 $2-2a$.

（1）确定 m 的值，并讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=xf(x)-\frac{1}{2}x^3+2x$，若 $g(x)$ 有两个不同零点 x_1，x_2，且 $x_2-3x_1\geqslant 0$，证明：$x_1+x_2>\frac{6}{e^2}$.

69.（2021 烟台三模 22）已知函数 $f(x)=e^x(mx^2+x)$，$g(x)=e^x x^2+ax+a\ln x+1$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 m 的值；

（2）当 $m=1$ 时，若对 $\forall x>0$，不等式 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的值.

70.（2021 潍坊四县 5 月联考 22）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，其中 a，$b\in$R，e=2.71828…为自然对数的底数.

（1）设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，求函数 $g(x)$ 在区间[0，1]上的最小值；

（2）若 $f(1)=0$，函数 $f(x)$ 在区间（0，1）内有零点，求 a 的取值范围.

71.（2021 菏泽二模 22）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$（a，$b\in R$），e = 2.71828…为自然对数的底数.

(1)设 $g(x)=f'(x)$，若 $g(x)$ 是（0，2）上的单调函数，求 a 的取值范围；

(2)若 $f(2)=0$，函数 $f(x)$ 在（0，2）上有零点，求 a 的取值范围.

72.（2021 聊城二模 22）已知函数 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-2$，$g(x)=\frac{1}{2}x^2+\sin x-e^{bx}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

73.（2021 临沂二模 22）已知函数 $f(x)=xe^x-a\ln x$，$a\in\mathbb{R}$.

（1）若 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线过原点，求 a 的值；

（2）在（1）的条件下，若 $f(x)\geqslant b(x-1)^2+a(\ln x+1)$ 恒成立，求 b 的取值范围.

74.（2021泰安二模22）已知函数 $f(x)=m\ln x+kx+1$（$m>0$）.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若存在实数 k，使得 $xf'(x)\leqslant e^{mx}$ 恒成立的 m 值有且只有一个，求 $k+m$ 的值.

75.（2021烟台适应性练习一22）已知函数 $f(x)=a(x^2-x)-\ln x$（$a\in R$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $x>1$ 时，$\frac{2e^{x-1}}{\ln x}\geq\frac{x^2+1}{x^2-x}$.

76.（2021 潍坊三模 22）2 设函数 $f\left(x\right)=x\ln x$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(e^{-2},f\left(e^{-2}\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=a$ 有两个实根，设为 x_1， x_2（$x_1<x_2$），证明：$x_2-x_1<1+2a+e^{-2}$.

77.（2021 德州二模 22）已知函数 $f(x)=x\ln x+mx$ ，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 1.

（1）求实数 m 的值；

（2）设 $g(x)=\frac{af(x)}{x}+x^2-8x(a\in R)$ 在定义域内有两个不同的极值点 x_1 、 x_2 ，求实数 a 的取值范围；

（3）在（2）的条件下，令 $x_1<x_2$ 且 $x_1\neq 1$ ，总有 $(t-2)(4+3x_1-x_1^2)<\frac{a\ln x_1}{1-x_1}$ 成立，求实数 t 的取值范围.

78.（2021 滨州二模 22）已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-2ax,a\in\mathbf{R}$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2 当 $a>0$ 时，若 $x_1\neq x_2$，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，求证：$x_1+x_2<4a-2$.

79.（2021 日照三模 22）设函数 $f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}ax^2-x$.

（1）若函数 f（x）在 R 上单调递增，求 a 的值；

（2）当 $a>1$ 时，

①证明：函数 f（x）有两个极值点 x_1，x_2（$x_1<x_2$），且 x_2-x_1 随着 a 的增大而增大；

②证明：$f(x_2)<1+\frac{sinx_2-x_2}{2}$.

80.（2021 聊城三模 22）已知 $f(x)=e^x-ax^2-x-1$.

（1）当 $a=\frac{e}{2}$ 时求 $f(x)$ 的极值点个数；

（2）当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f(x)\geq 0$ ，求 a 的取值范围；

（3）求证： $\frac{2}{2e-1}+\frac{2}{2e^2-1}+\cdots+\frac{2}{2e^n-1}<\frac{3}{2}$ ，其中 $n\in N^*$.

专题九　平面解析几何

一、单项选择题

1. （2021 枣庄二模 4）已知点(1，1)在抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$上，则 C 的焦点到其准线的距离为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

2. （2021 青岛二模 3）在平面直角坐标系中，直线 l 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的一条渐近线，则（　　）

A. 直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相交　　B. 直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切

C. 直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 相离　　D. 直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 相切

3. （2021 烟台适应性练习一 3）已知双曲线 $x^2-my^2=1$（$m\in R$）的离心率为$\frac{5}{3}$，则其渐近线方程为（　　）

A. $4x\pm3y=0$　　B. $3x\pm4y=0$　　C. $3x\pm5y=0$　　D. $5x\pm3y=0$

4. （2021 泰安二模 5）已知抛物线 $x^2=2py$（$p\neq0$）的准线与圆 $x^2+(y-2)^2=9$ 相切，则 $p=$（　　）

A. 2　　B. 6 或 -6　　C. -2 或 10　　D. 2 或 -10

5. （2021 聊城二模 4）已知△ABC三个顶点都在抛物线 $x^2=8y$上，且 F为抛物线的焦点，若 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

则 $|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{CF}|=$（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

6. （2021 济宁二模 5）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过点 $P(1,\frac{1}{2})$ 的直线交椭圆 C 于 A、B 两点，若 P 为 AB 的中点，则直线 AB 的方程为（　　）

A. $3x-2y-2=0$　　B. $3x+2y-4=0$

C. $3x+4y-5=0$　　D. $3x-4y-1=0$

7. （2021 省实验中学二模 5）已知两圆相交于两点 $A(1，3)$，$B(t，-1)$，两圆圆心都在直线 $x+2y+c=0$ 上，则 $t+c$ 的值是（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

8. （2021 日照二模 7）已知 F 是抛物线 C：$y^2=2px$ 的焦点，$x=-2$ 是抛物线 C 的准线，点 $N(0，t)$（$t\neq0$），连接 FN 交抛物线 C 于 M 点，$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MF}=\vec{0}$，则△$OFN$ 的面积为（　　）

A. 6　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

9. （2021 烟台三模 7）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点为 F，过 F 作双曲线两渐近线的垂线垂足分别为点 A，B（A，B 分别在一、四象限），若 $2|AB|=|FA|$，则该双曲线的离心率为

（　　）

A 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

10.（2021 济南二模 6）已知抛物线 $x^2=2py$（$p>0$），过焦点 F 的直线与抛物线交于 A，B 两点（点 A 在第一象限）．若直线 AB 的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 A 的纵坐标为$\frac{3}{2}$，则 p 的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

11.（2021 青岛三模 6）已知直线 l：$3x+my+3=0$，曲线 C：$x^2+y^2+4x+2my+5=0$，则下列说法正确的是（　　）

A. “$m>1$”是曲线 C 表示圆的充要条件

B. 当 $m=3\sqrt{3}$时，直线 l 与曲线 C 表示的圆相交所得的弦长为 1

C. “$m=-3$”是直线 l 与曲线 C 表示的圆相切的充分不必要条件

D. 当 $m=-2$ 时，曲线 C 与圆 $x^2+y^2=1$ 有两个公共点

12.（2021 滨州二模 5）已知 F_1，F_2 分别是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，点 P 是双曲线 C 上在第一象限内的一点，若$\sin\angle PF_2F_1=3\sin\angle PF_1F_2$，则双曲线 C 的离心率的取值范围为

A. $(1,2)$　　B. $(1,3)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(2,3)$

13.（2021 聊城三模 8）已知 A，B，C 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的三点，直线 AB 经过原点 O，AC 经过右焦点 F，若 $BF\perp AC$，且 $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{FA}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{17}}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{37}}{5}$

14.（2021 淄博三模 8）设双曲线C：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P（异于顶点）在双曲线 C 的右支上，则下列说法正确的是（　　）

A. $\triangle PF_1F_2$ 可能是正三角形

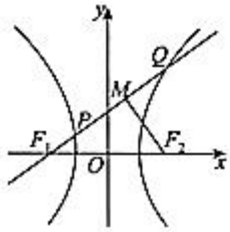
B. P 到两渐近线的距离之积是定值

C. 若 $PF_1\perp PF_2$，则$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 8

D. 在$\triangle PF_1F_2$ 中，$\frac{\sin\angle F_1PF_2}{\sin\angle PF_2F_1-\sin\angle PF_1F_2}=\frac{5}{4}$

15.（2021 潍坊四县 5 月联考 7）如图，F_1，F_2 是双曲线 l：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，过

F_1的直线与双曲线左、右两支分别交于点 P，Q. 若$\overrightarrow{F_1Q}=5\overrightarrow{F_1P}$，$M$为 PQ的中点，且$\overrightarrow{F_1Q}\perp\overrightarrow{F_2M}$，则双曲线的离心率为（　　）



A. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

16.（2021 潍坊三模 7）双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线与双曲线$C$的右支在第一象限的交点为 A，与$y$轴的交点为$B$，且$\triangle ABF_2$为等边三角形，则以下说法正确的是（　　）

A. 双曲线C的渐近线方程为$y=\pm x$

B. 若双曲线C的实轴长为 2，则$S_{\triangle AF_1F_2}=\sqrt{3}$

C. 若双曲线C的焦距为$2\sqrt{3}$，则点 A 的纵坐标为$\sqrt{3}$

D. 点F_2在以AF_1为直径的圆上

17.（2021 烟台适应性练习二 8）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A在 C的右支上，AF_1与 C交于点 B，若$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，且$|\overrightarrow{F_2A}|=|\overrightarrow{F_2B}|$，则 C的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{7}$

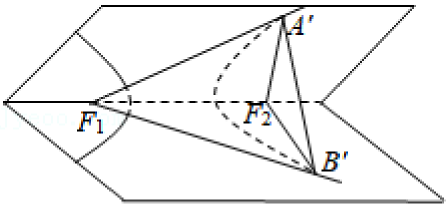
18.（2021 枣庄二模 8）已知椭圆 C 与双曲线$x^2-y^2=1$有相同的左焦点 F_1、右焦点 F_2，点 P 是两曲线的一个交点，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$. 过 F_2作倾斜角为45°的直线交 C 于 A，B 两点（点 A 在 x轴的上方），且$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AF_2}$，则$\lambda$的值为

A. $3+\sqrt{3}$　　B. $3+\sqrt{2}$　　C. $2+\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{2}$

19.（2021 青岛二模 8）在平面直角坐标系中，双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，抛物线 Z：$y^2=2px(p>0)$的焦点恰为 F_2，点 P是双曲线 C和抛物线 Z的一个交点，且$|PF_2|=|F_1F_2|$，则双曲线 C的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}+1$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

20.（2021 临沂二模 8）点 F_1，F_2是双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，过点 F_2作直线 $AB\perp F_1F_2$交双曲线 C于 A，B两点，现将双曲线所在平面沿直线 F_1F_2折成平面角为锐角 α 的二面角，如图，翻折后 A，B两点的对应点分别为 A'，B'，$\angle A'F_1B'=\beta$，若$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}=\frac{25}{16}$，则双曲线 C的离心率为（　　）



A．$\frac{\sqrt{17}}{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

21.（2021 济宁二模 8）“曼哈顿距离”是由赫尔曼•闵可夫斯基所创的词汇，是一种使用在几何度量空间的几何学用语. 例如在平面直角坐标系中，点 $P(x_1,y_1)$ 、$Q(x_2,y_2)$ 的曼哈顿距离为：$L_{PQ}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. 若点 $P(1,2)$ ，点 Q 为圆 $C:x^2+y^2=4$ 上一动点，则 L_{PQ} 的最大值为（　　　）

A．$1+\sqrt{2}$　　B．$1+2\sqrt{2}$　　C．$3+\sqrt{2}$　　D．$3+2\sqrt{2}$

二、多项选择题

22.（2021 聊城二模 10）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右顶点分别为 A，B，点 P是 C上的任意一点，则（　　）

A．双曲线 C的离心率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B．焦点到渐近线的距离为 3

C．点 P到两条渐近线的距离之积为$\frac{9}{4}$

D．当 P与 A、B不重合时，直线 PA，PB的斜率之积为 3

23.（2021 青岛三模 10）已知曲线 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{m}=1$，$F_1$，$F_2$分别为曲线 C的左、右焦点，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $m=-3$，则曲线 C的两条渐近线所成的锐角为$\frac{\pi}{3}$

B．若曲线 C的离心率 $e=2$，则 $m=-27$

C．若 $m=3$，则曲线 C上不存在点 P，使得$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$

D．若 $m=3$，P为 C上一个动点，则$\triangle PF_1F_2$面积的最大值为 $3\sqrt{2}$

24.（2021 淄博三模 11）已知圆 O_1：$x^2+y^2-2x-3=0$ 和圆 O_2：$x^2+y^2-2y-1=0$ 交点为 A，B，则（　　）

A．圆 O_1 和圆 O_2 有两条公切线

B．直线 AB 的方程为 $x-y+1=0$

C．圆 O_2 上存在两点 P 和 Q 使得 $|PQ|>|AB|$

D．圆 O_1 上的点到直线 AB 的最大距离为 $2+\sqrt{2}$

25.（2021 潍坊二模 11）已知双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，其左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_2 作一直线与双曲线 C 的右支交于点 P，Q，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\triangle PF_1Q$ 的周长为 4

B．$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 3

C．$|PF_1|=\sqrt{7}+1$

D．$\triangle PF_1Q$ 的内切圆半径为 $\sqrt{7}-1$

26.（2021 淄博二模 10）设椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的的焦点为 F_1，F_2，P 是 C 上的动点，则下列结论正确的是（　　　）.

A．离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

B．$|\overrightarrow{PF_2}|$ 的最大值为 3

C．$\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$

D．$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 的最小值为 2

27.（2021 烟台三模 12）已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上一动点，F 为抛物线的焦点，$M(2,1)$，直线 l 与抛物线交于点 A,B，下列结论正确的是（　　）

A．$|MP|+|PF|$ 的最小值为 4

B．若直线 l 过点 F，则以 AF 为直径的圆与 y 轴相切

C．存在直线 l，使得 A,B 两点关于直线 $x-y+1=0$ 对称

D．设抛物线准线与 x 轴交点为 Q，若直线 l 过点 F，则有 $\angle AQF=\angle BQF$

28.（2021 德州二模 11）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<\sqrt{5})$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在椭圆上，点 Q 是圆 $x^2+(y-4)^2=1$ 关于直线 $x-y=0$ 对称的曲线 E 上任意一点，若 $|PQ|-|PF_2|$ 的最小值为 $5-2\sqrt{5}$，则下列说法正确的是（　　　）.

A．椭圆 C 的焦距为 2

B．曲线 E 过点 F_2 的切线斜率为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．若 A、B 为椭圆 C 上关于原点对称的异于顶点和点 P 的两点，则直线 PA 与 PB 斜率之积为

$-\frac{1}{5}$

D. $|PQ|+|PF_2|$ 的最小值为 2

29.（2021 临沂二模 12）已知抛物线 $x^2=2py$（$p>0$）的焦点为 F，且 A（2，1），B（x_1，y_2），C（x_2，y_2）在抛物线上，O 为坐标原点，下列说法正确的是（　　）

A. 点 F 的坐标为（0，2）

B. 若 $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AF}$，则 $|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=2|\overrightarrow{AF}|$

C. 若 $|\overrightarrow{BC}|=6$，则 BC 的中点到 x 轴距离最小值为 2

D. 若直线 BC 过点 F，则直线 OB 与 OC 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$

30.（2021 淄博三模 12）2021 年 3 月 30 日，小米正式开始启用具备“超椭圆”数学之美的新 log*o*．设计师的灵感来源于曲线 C：$|x|^n+|y|^n=1$．则下列说法正确的是（　　）

A. 曲线 C 关于原点成中心对称

B. 当 $n=-2$ 时，曲线 C 上的点到原点的距离的最小值为 2

C. 当 $n>0$ 时，曲线 C 所围成图形的面积的最小值为 π

D. 当 $n>0$ 时，曲线 C 所围成图形的面积小于 4

31.（2021 菏泽二模 11）已知 F_1，F_2 为双曲线 C:$x^2-\frac{y}{4}=1$ 的左、右焦点，在双曲线右支上取一点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，直线 PF_2 与 y 轴交于点 Q，连接 QF_1，△PQF_1 的内切圆圆心为 I，则下列结论正确的有

A. F_1，F_2，P，I 四点共圆　　　　*B.* △PQF_1 的内切圆半径为 1

C. I 为线段 OQ 的三等分点　　　　*D.* PF_1 与其中一条渐近线垂直

32.（2021 日照二模 12）已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），$A_1$，$A_2$ 是其左、右顶点，F_1，F_2 是其左、右焦点，P 是双曲线上异于 A_1，A_2 的任意一点，下列结论正确的是（　　）

A. $||PF_1|-|PF_2||=2a$

B. 直线 PA_1，PA_2 的斜率之积等于定值 $\frac{b^2}{a^2}$

C. 使得△PF_1F_2 为等腰三角形的点 P 有且仅有 8 个

D. △PF_1F_2 的面积为 $\frac{b^2}{\tan\frac{\angle A_1PA_2}{2}}$

33.（2021烟台适应性练习二 12）过抛物线 C：$x^2=4y$ 焦点 F 的直线 l 交 C 于 P，Q 两点，O 为坐标原点，则（　　）

A．不存在直线 l，使得 $OP\perp OQ$

B．若 $\overrightarrow{FP}=2\overrightarrow{QF}$，则直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C．过 P 作 C 准线的垂线，垂足为 M，若 $|PF|=3$，则 $\cos\angle FPM=\frac{1}{3}$

D．过 P，Q 两点分别作抛物线 C 的切线，则两切线交点的纵坐标为定值

34.（2021日照三模 12）曲线 C：$\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=3$，点 P 在曲线 C 上．给出下列四个结论正确的是（　　）

A．曲线 C 关于 y 轴对称

B．曲线 C 与 y 轴交点为（0，±2）

C．曲线 C 上的点的横坐标的取值范围是[－2，2]

D．若 A（－1，0），B（1，0），则存在点 P，使△PAB 的面积大于 $\frac{3}{2}$

35.（2021济南二模 12）已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，过 F_2 且倾斜角为 θ 的直线与双曲线的右支交于 A，B 两点，记△AF_1F_2 的内切圆 O_1 的半径为 r_1，△BF_1F_2 的内切圆 O_2 的半径为 r_2，圆 O_1 的面积为 S_1，圆 O_2 的面积为 S_2，则（　　）

A． θ 的取值范围是（$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$）　　B．直线 O_1O_2 与 x 轴垂直

C．若 $r_1+r_2=2$，则 $|AB|=6$　　D．S_1+S_2 的取值范围是[2π，$\frac{10\pi}{3}$）

三、填空题

36.（2021日照三模 13）已知双曲线 C 过点 $(3,\sqrt{2})$ 且渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则双曲线 C 的标准方程为_____

37.（2021聊城三模 15）已知点 $A(0,5)$，过抛物线 $x^2=12y$ 上一点 P 作 $y=-3$ 的垂线，垂足为 B，若 $|PB|=|PA|$，则 $|PB|=$ ________.

38.（2021烟台三模 14）已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-2x-2ay+a^2-3=0$ 相交于 A，B 两点，且△ABC 为钝角三角形，则实数 a 的取值范围为______.

39.（2021淄博三模 14）已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 AB 过 F_1 与椭圆交于 A，B 两点，当△F_2AB 为正三角形时，该椭圆的离心率为______.

40.（2021 烟台适应性练习二 14）已知两条直线 l_1：$y=2x+m$，l_2：$y=2x+n$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 交于 A，B，C，D 四点且构成正方形 $ABCD$，则 $|m-n|$ 的值为________.

41.（2021 潍坊四县 5 月联考 16）从抛物线 $x^2=4y$ 的准线 l 上一点 P 引抛物线的两条切线 PA、PB，且 A、B 为切点，若直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，则 P 点的横坐标为________.

42.（2021 济宁二模 15）设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，过点 F_1 的直线 l 分别与双曲线的左、右支交于点 A 、B ，若以 AB 为直径的圆过点 F_2 ，且 $|AF_2|=|BF_2|$ ，则该双曲线的离心率为________.

43.（2021 潍坊三模 15）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左，右焦点分别为 F_1，F_2，点 A，B 在椭圆上，且满足 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{AF_2}\cdot\overrightarrow{AF_1}=0$，则椭圆 C 的离心率为________.

44.（2021 日照三模 15）设 x、y 均为正实数，且 $\frac{3}{2+x}+\frac{3}{2+y}=1$，以点（$x$，$y$）为圆心，$R=xy$ 为半径的圆的面积最小时圆的标准方程为________________.

45.（2021 德州二模 15）已知 F_1 ， F_2 是双曲线 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ 的两个焦点， P 是双曲线上任意一点，过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 平分线的垂线，垂足为 N ，则点 N 到直线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 的距离的取值范围是________.

46.（2021 潍坊二模 15）已知一张纸上画有半径为 2 的圆 O，在圆 0 内有一个定点 A，且 $OA=1$，折叠纸片，使圆上某一点 A' 刚好与 A 点重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕，当 A' 取遍圆上所有点时，所有折痕与 OA' 的交点形成的曲线记为 C，则曲线 C 上的点到圆 O 上的点的最大距离为_______.

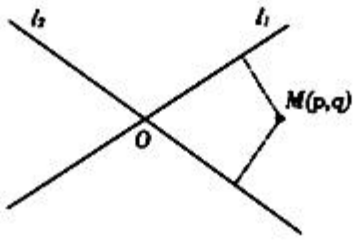
47.（2021 淄博二模 16）已知 F_1 ， F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点， c 是双曲线 C 的半焦距，点 A 是圆 $O:x^2+y^2=c^2$ 上一点，线段 F_2A 交双曲线 C 的右支于点 B ，且有 $|F_2A|=a$ ， $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}$ ，则双曲线 C 的离心率是________.

48.（2021 泰安二模 16）过曲线 C_1：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$， $b>0$）的左焦点 F_1 作曲线 C_2：$x^2+y^2=a^2$ 的切线，设切点为 M，延长 F_1M 交曲线 C_3：$y^2=2px$（$p>0$）于点 N，其中 C_1、C_3 有一个共同的焦点，若 $|MF_1|=|MN|$，则曲线 C_1 的离心率为____________________.

49.（2021 省实验中学二模 16）已知过抛物线 $y^2=x$ 焦点 F 的直线与抛物线交于 A，B 两点，过坐标原点 O

的直线与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）交于 M，N 两点，点 P 是双曲线上一点，且直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2，若不等式$(|k_1|+4|k_2|)(|AF|\cdot|BF|)\geq|AF|+|BF|$恒成立，则双曲线的离心率为 ________.

50.（2021 聊城二模 16）如图所示，平面中两条直线 l_1 与 l_2 相交于点 O，对于平面上任意一点 M，若 p，q 分别是 M 到直线 l_1 与 l_2 的距离，则称有序非负实数对（p，q）是点 M 的“距离坐标”，给出下列四个命题：



①“距离坐标”为（1，0）的两点间距离为 2；

②若 $p=q$，则点 M 的轨迹是一条过 O 点的直线；

③若 $pq\neq0$，则“距离坐标”为（p，q）的点有且仅有 4 个；

④若直线 l_1 与 l_2 的夹角是 60°，则 $|OM|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{p^2+pq+q^2}$或$|OM|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{p^2-pq+q^2}$.

其中所有正确命题的序号为__________.

51.（2021 烟台适应性练习一 16）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过原点的直线与 C 交于 A，B 两点（A 在第一象限），若$|AB|=2\sqrt{a^2-b^2}$，且 $\sin\angle ABF_1\leq2\sin\angle BAF_1$，则椭圆离心率的取值范围是____________.

四、解答题

52.（2021 青岛三模 20）在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，抛物线 C：$x^2=2py$（$p>0$）的焦点为 F，抛物线 C 上不同两点 M，N 同时满足下列三个条件中的两个：

①$|FM|+|FN|=|MN|$；②$|OM|=|ON|=|MN|=8\sqrt{6}$；③直线 MN 的方程为 $y=6p$.

（1）请分析说明两点 M，N 满足的是哪两个条件？并求抛物线 C 的标准方程；

（2）若直线 l 与抛物线 C 相切于点 P，l 与椭圆 D：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于 A，B 两点，l 与直线 $y=-\sqrt{2}$ 交于点 Q，以 PQ 为直径的圆与直线 $y=-\sqrt{2}$ 交于 Q，Z 两点，求证：直线 OZ 经过线段 AB 的中点.

53.（2021 烟台适应性练习二 21）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(2,\sqrt{2})$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）过点 $P(0,1)$ 作椭圆的两条弦 AB，CD（A，C 分别位于第一、二象限），若 AD，BC 与直线 $y=1$ 分别交于点 M，N，求证：$|PM|=|PN|$.

54.（2021 潍坊二模 21）已知一个半径为$\frac{3}{2}$的圆的圆心在抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）上，该圆经过坐标原点且与 C 的准线 l 相切．过抛物线 C 的焦点 F 的直线 AB 交 C 于 A，B 两点，过弦 AB 的中点 M 作平行于 x 轴的直线与直线 OA，OB，l 分别相交于 P，Q，N 三点．

（1）求 C 的方程；

（2）当$|PQ|=\frac{1}{3}|MN|$时，求直线 AB 的方程．

55.（2021 淄博二模 22）已知抛物线 Ω 的标准方程是 $x^2=2py(p>0)$ ，过点 $M(0,2p)$ 的直线 l 与抛物线 Ω 相交于 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ 两点，且满足 $y_1\cdot y_2=64$.

（1）求抛物线 Ω 的标准方程及准线方程；

（2）设垂直于 l 的直线 l_1 和抛物线 Ω 有两个不同的公共点 C，D ，当 C，D 均在以 AB 为直径的圆上时，求直线 l 的斜率.

56.（2021 泰安二模 20）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 M、N 两点，圆 P 是△MNF_2 的内切圆．当直线 l 的倾斜角为 45° 时，直线 l 与椭圆 C 交于点 $(-\frac{4}{3}，-\frac{1}{3})$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求圆 P 周长的最大值.

57.（2021 烟台三模 21）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过$F_2$且斜率不为 0 的直线与椭圆交于 A，$B$两点，$\triangle F_1AF_2$的周长为$4+2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设O为坐标原点，求$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$的取值范围.

58.（2021 日照二模 1）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过点 P（$\sqrt{2}$，1），且离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，⊙O：$x^2+y^2=r^2$的任意一条切线 l 与椭圆交于 A，B两点.

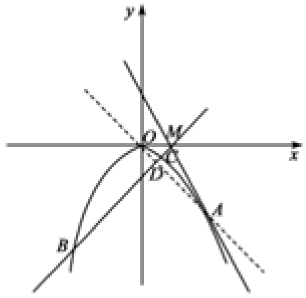
（1）求椭圆 C的方程；

（2）是否存在⊙O，使得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，若存在，求△$AOB$的面积 S的范围；不存在，请说明理由.

59.（2021 德州二模 20）已知抛物线 $E:x^2=-2y$ ，过抛物线上第四象限的点 A 作抛物线的切线，与 x 轴交于点 M ．过 M 做 OA 的垂线，交抛物线于 B 、 C 两点，交 OA 于点 D ．

（1）求证：直线 BC 过定点；

（2）若 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}\geq 2$ ，求 $|AD|\cdot|AO|$ 的最小值．



60.（2021 潍坊四县 5 月联考 21）椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为椭圆短轴上的一个顶点，PF_1 的延长线与椭圆相交于 G，$\triangle PGF_2$ 的周长为 8，$|PF_1|=3|GF_1|$．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）过椭圆 E 外一点 A 作矩形 $ABCD$，使椭圆 E 与矩形 $ABCD$ 的四条边都相切，求矩形 $ABCD$ 面积的取值范围．

61.（2021 潍坊三模 21）设抛物线C：$x^2=2py$（$p>0$）的焦点为F，点$P\left(m,2\right)$（$m>0$）在抛物线C上，且满足$\left|PF\right|=3$.

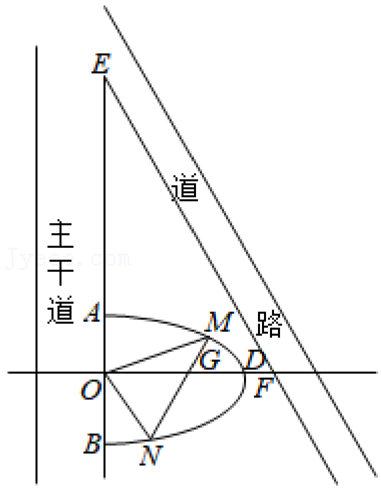
（1）求抛物线C的标准方程；

（2）过点$G\left(0,4\right)$ 直线l与抛物线C交于 A， B两点，分别以 A， B为切点的抛物线C的两条切线交于点Q，求三角形PQG周长的最小值.

62.（2021 日照三模 20）某城市决定在夹角为 30° 的两条道路 EB、EF 之间建造一个半椭圆形状的主题公园，如图所示，AB=2 千米，O 为 AB 的中点，OD 为椭圆的长半轴，在半椭圆形区域内再建造一个三角形游乐区域 OMN，其中 M，N在椭圆上，且 MN的倾斜角为 45°，交 OD 于 G.

（1）若 OE=3 千米，为了不破坏道路 EF，求椭圆长半轴长的最大值；

（2）若椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，当线段 OG 长为何值时，游乐区域△OMN的面积最大？



63.（2021 省实验中学二模 21）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1（$-\sqrt{3}$，0），F_2（$\sqrt{3}$，0），过点 F_2 的直线 l 与椭圆交于不同两点 M，N．当直线 l 斜率为－1 时，弦 MN 的中点坐标为（$\frac{4}{3}$，$-\frac{1}{3}$）．

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）求△F_1MN 的内切圆半径 r 最大时，直线 l 的方程．

64.（2021 烟台适应性练习一 21）已知抛物线 C：$x^2=my$（$m>0$）的焦点 F 到其准线的距离为 1．

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过 F 的直线与抛物线 C 相交于 A，B 两点，在 A，B 处分别作 C 的切线，交点为 P．

（ⅰ）证明：$AB\perp FP$；

（ⅱ）若直线 FP 交 C 于 M，N 两点（M 在线段 FP 上），求四边形 $AMBN$ 面积的最小值．

65.（2021 济宁二模 21）已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ ，过点 $T(0,p)$ 作两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2 ，l_1 交抛物线 C 于 A ，B 两点，l_2 交抛物线 C 于 E 、F 两点，当点 A 的横坐标为 1 时，抛物线 C 在点 A 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）已知 O 为坐标原点，线段 AB 的中点为 M，线段 EF 的中点为 N，求 $\triangle OMN$ 面积的最小值.

66.（2021 滨州二模 21）已知圆 $C:\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=12$，动圆 M 过点 $D\left(\sqrt{2},0\right)$ 且与圆 C 相切.

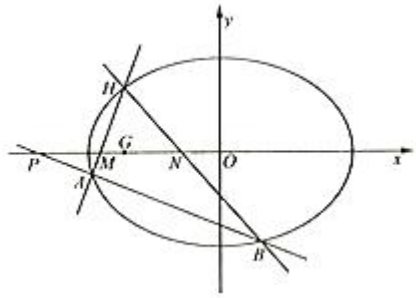
（1）求动圆圆心 M 的轨迹 E 的方程；

（2）假设直线 l 与轨迹 E 相交于 A，B 两点，且在轨迹 E 上存在一点 P，使四边形 $OAPB$ 为平行四边形，试问平行四边形 $OAPB$ 的面积是否为定值?若是，求出此定值；若不是，请说明理由.

67.（2021 济南二模 21）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且经过点 H（－2，1）.

（1）求椭圆 C的方程；

（2）过点 P（－3，0）的直线与椭圆 C相交于 A，B两点，直线 HA，HB 分别交 x 轴于 M，N 两点，点 G（－2，0），若 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PG}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{PG}$. 求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.



68.（2021 淄博三模 21）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 E上的点与其右焦点 F的最短距离为$\sqrt{2}-1$.

（1）求椭圆 E的标准方程；

（2）若 A，B，C为椭圆 E上的 3 个动点，且△ABC的重心是 O（0，0），求证：△ABC的面积为定值，并求这个定值.

69.（2021 聊城二模 21）已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，$M$ 为 C 上的动点，其中 M 到 F_1 的最短距离为 1，且当△MF_1F_2 的面积最大时，△MF_1F_2 恰好为等边三角形．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）斜率为 k 的动直线 l 过点 F_2，且与椭圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P，那么，$\frac{|PF_2|}{|AB|}$ 是否为定值？若是，请证明你的结论；若不是，请说明理由．

70.（2021 聊城三模 21）已知圆 $F_1:(x+1)^2+y^2=r^2$，圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=(4-r)^2$，$0<r<4$．当 r 变化时，圆 F_1 与圆 F_2 的交点 P 的轨迹为曲线 C，

（1）求曲线 C 的方程；

（2）已知点 $P(1,\frac{3}{2})$，过曲线 C 右焦点 F_2 的直线交曲线 C 于 A、B 两点，与直线 $x=m$ 交于点 D，是否存在实数 m，λ，使得 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda k_{PD}$ 成立，若存在，求出 m，λ；若不存在，请说明理由．

71.（2021枣庄二模21）已知动点M与两个定点O(0，0)，A(3，0)的距离的比为$\frac{1}{2}$，动点M的轨迹为曲线C.

（1）求C的轨迹方程，并说明其形状；

（2）过直线$x=3$上的动点P(3，p)($p\neq0$)分别作C的两条切线PQ、PR（Q、R为切点），N为弦QR的中点，直线l：$3x+4y=6$分别与x轴、y轴交于点E、F，求△NEF的面积S的取值范围.

72.（2021临沂二模21）已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆$C$上，以$PF_1$为直径的圆$E$：$x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$过焦点$F_2$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若椭圆C的右顶点为A，与x轴不垂直的直线l交椭圆C于M，N两点（M，N与A点不重合），且满足$AM\perp AN$，点Q为MN中点，求直线MN与AQ的斜率之积的取值范围.

73.（2021 菏泽二模 21）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上的点到焦点的最大距离为 3，最小距离为 1

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过椭圆 C 右焦点 F_2，作直线 l 与椭圆交于 A，B 两点（A，B 不为长轴顶点），过点 A，B 分别作直线 $x=4$ 的垂线，垂足依次为 E，F，且直线 AF，BE 相交于点 G.

①证明:G 为定点；

②求△ABG 面积的最大值.

74（2021 青岛二模 22）在平面直角坐标系中，已知 O 为坐标原点，点 W（x_n，y_n）为直线 l：$y=kx+m$（$km\neq 0$）与椭圆 C：$2nx^2+4ny^2=1$ 的一个交点，且$k=-\frac{x_n}{2y_n}$，$n\in$N*.

（1）证明：直线 l 与椭圆 C 相切；

（2）已知直线 l 与椭圆 D：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于 A，B 两点，且点 W 为 AB 的中点.

（ⅰ）证明：椭圆 D 的离心率为定值；

（ⅱ）记△OAB 的面积为 S，若$b^2=\frac{4}{3}+\frac{1}{4n}$，证明：$2n\cdot\sin(S^2)>1$.

专题十　概率、统计

一、单项选择题

1. （2021 潍坊三模 3）某学校参加志愿服务社团的学生中，高一年级有 50 人，高二年级有 30 人，高三年级有 20 人，现用分层抽样的方法从这 100 名学生中抽取学生组成一个活动小组，已知从高二年级的学生中抽取了 6 人，则从高三年级的学生中应抽取的人数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

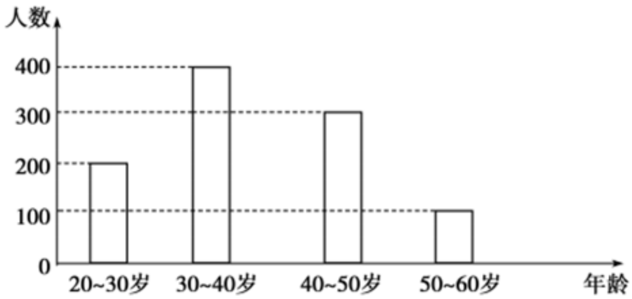
2. （2021 青岛二模 2）若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,3^2)$，$P(\xi<3-5a)=P(\xi>2a+1)$，则实数 a 等于（　　）

A．－1　　B．0　　C．1　　D．2

3. （2021 济宁二模 1）已知随机变量 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，若 $P(X\le 0)=0.2$，则 $P(X<2)=$（　　）

A．0.2　　B．0.4　　C．0.6　　D．0.8

4. （2021 德州二模 4）2021 年我国推进新冠疫苗全人群免费接种，某小区年龄分布如下图所示，现用分层抽样的方法从该小区所有人中抽取 60 人进行抗体检测，则从 40 岁至 50 岁之间的人群中抽取人数为（　　）.



A．18　　B．24　　C．5　　D．9

5. （2021 济南二模 4）第 24 届冬季奥林匹克运动会将于 2022 年在北京举办．为了解某城市居民对冰雪运动的关注情况，随机抽取了该市 100 人进行调查统计，得到如下 2×2 列联表．

	男	女	合计
关注冰雪运动	35	25	60
不关注冰雪运动	15	25	40
合计	50	50	100

根据列联表可知（　　）

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

附表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

A．该市女性居民中大约有 5%的人关注冰雪运动

B．该市男性居民中大约有 95%的人关注冰雪运动

C．有 95%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关

D．有 99%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关

6.（2021 菏泽二模 4）下列说法错误的是(　　)

A. 用相关指数 R^2 来刻画回归效果，R^2 越小说明拟合效果越好

B. 已知随机变量 $X\sim N(5,\sigma^2)$，若 $P(x<1)=0.1$，则 $P(x\leqslant 9)=9.9$

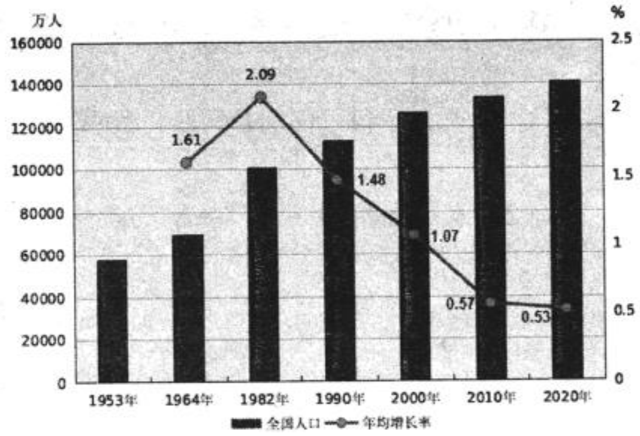
C. 某人每次投篮的命中率为$\frac{3}{5}$，现投篮 5 次，设投中次数为随机变量 Y. 则 $E(2Y+1)=7$

D. 对于独立性检验，随机变量 K^2 的观测值 k 值越小，判定“两分类变量有关系”犯错误的概率越大

7.（2021 烟台适应性练习二 6）袋中装有标号分别为 1，2，3，4，5，6 的六个相同小球．现有一款摸球游戏，从袋中一次性摸出三个小球，记下号码并放回，如果三个号码的和是 3 的倍数，则获奖，若有 4 人参与摸球游戏，则恰好 2 人获奖的概率是（　　）

A．$\dfrac{36}{625}$　　B．$\dfrac{128}{625}$　　C．$\dfrac{216}{625}$　　D．$\dfrac{336}{625}$

8.（2021 烟台三模 6）人口普查是世界各国所广泛采用的搜集人口资料的一种科学方法，是提供全国基本人口数据的主要来源．根据人口普查的基本情况，可以科学的研究制定社会、经济、科教等各项发展政策，是国家科学决策的重要基础工作，人口普查资料是制定人口政策的依据和前提．截止目前，我国共进行了七次人口普查，下图是这七次普查的全国人口及年均增长率情况，下列说法正确的是（　　）



A．年均增长率逐次减小

B．年均增长率的极差是 1.08%

C．这七次普查的人口数逐次增加，且第四次增幅最小

D．第七次普查的人口数最多，且第三次增幅最大

9. （2021 滨州二模 6）甲、乙两人做从装有 14 个玻璃球的盒子中抓取玻璃球的游戏，规定：甲、乙两人轮流抓取，每次至少抓取 1 个，最多抓取 4 个，最后一次取完者获胜．若甲先抓取，为确保甲一定获胜，则甲第一次应该抓取的玻璃球个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

10. （2021 泰安二模 8）已知随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，有下列四个命题：

甲：$P(\xi < a-1) > P(\xi > a+2)$

乙：$P(\xi > a) = 0.5$

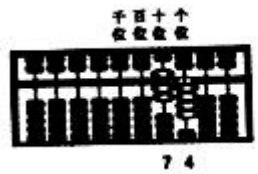
丙：$P(\xi \leqslant a) = 0.5$

丁：$P(a < \xi < a+1) < P(a+1 < \xi < a+2)$

如果只有一个假命题，则该命题为（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

11. （2021 聊城二模 6）算盘是中国传统的计算工具，其形长方，周为木框，内贯直柱，俗称“档”，档中横以梁，梁上两珠，每珠作数五，梁下五珠，每珠作数一．算珠梁上部分叫上珠，梁下部分叫下珠．例如，在十位档拨上一颗上珠和两颗下珠，个位档拨上四颗下珠，则表示数字 74，若在个、十、百、千位档中随机选择一档拨上一颗下珠，再随机选择两个不同档位各拨一颗上珠，则所表示的数字大于 300 的概率为（　　）



A．$\dfrac{7}{8}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{7}{24}$　　D．$\dfrac{5}{24}$

12. （2021 聊城三模 6）在某次脱贫攻坚表彰会上，共有 36 人受到表彰，其中男性多于女性，现从中随机选出 2 人作为代表上台领奖，若选出的两人性别相同的概率为 $\frac{1}{2}$，则受表彰人员中男性人数为（　　）

A．15　　B．18　　C．21　　D．15 或 21

13. （2021 枣庄二模 7）医用口罩由口罩面体和拉紧带组成，其中口罩面体分为内、中、外三层．内层为亲肤材质（普通卫生纱布或无纺布），中层为隔离过滤层（超细聚丙烯纤维熔喷材料层），外层为特殊材料抑菌层（无纺布或超薄聚丙烯熔喷材料层）．根据国家质量监督检验标准，医用口罩的过滤率是重要的指标，根据长期生产经验，某企业在生产线状态正常情况下生产的医用口罩的过滤率 $x \sim N(0.9372, 0.0139^2)$．若 $x \sim N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$，则 $P(\mu-2\sigma < x \leqslant \mu+2\sigma) = 0.9545$，$P(\mu-3\sigma < x \leqslant \mu+3\sigma) = 0.9973$，$0.97725^{50} \approx 0.3164$．有如下命题：

甲：$P(x\leqslant 0.9)<0.5$；乙：$P(x<0.4)>P(x>1.5)$；丙：$P(x>0.9789)=0.00135$；丁：假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 50 只口罩中过滤率大于 $\mu+2\sigma$ 的数量，则 $P(X\geqslant 1)\approx 0.6$．其中假命题是

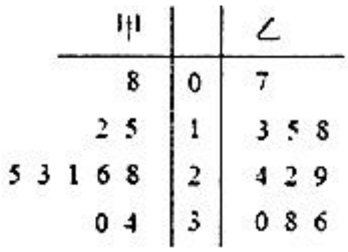
A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

14．（2021 省实验中学二模 6）市场调查发现，大约$\frac{3}{5}$的人喜欢在网上购买儿童玩具，其余的人则喜欢在实体店购买儿童玩具．经工商局抽样调查发现，网上购买的儿童玩具合格率为$\frac{4}{5}$，而实体店里的儿童玩具的合格率为$\frac{9}{10}$．现工商局 12345 电话接到一个关于儿童玩具不合格的投诉，则这个儿童玩具是在网上购买的可能性是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{5}{6}$

二、多项选择题

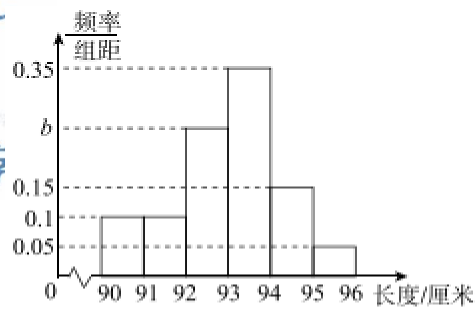
15．（2021 烟台适应性练习二 10）某教练组为了比较甲、乙两名篮球运动员的竞技状态，选取了他们最近 10 场常规赛得分制成如图的茎叶图，则从最近 10 场比赛的得分看（　　）



A．甲的中位数大于乙的中位数　　B．甲的平均数大于乙的平均数

C．甲的竞技状态比乙的更稳定　　D．乙的竞技状态比甲的更稳定

16．（2021 泰安二模 9）某大学生暑假到工厂参加生产劳动，生产了 100 件产品，质检人员测量其长度（单位：厘米），将所得数据分成 6 组：[90，91)，[91，92)，[92，93)，[93，94)，[94，95)，[95，96]，得到如图所示的频率分布直方图，则对这 100 件产品，下列说法中正确的是（　　）



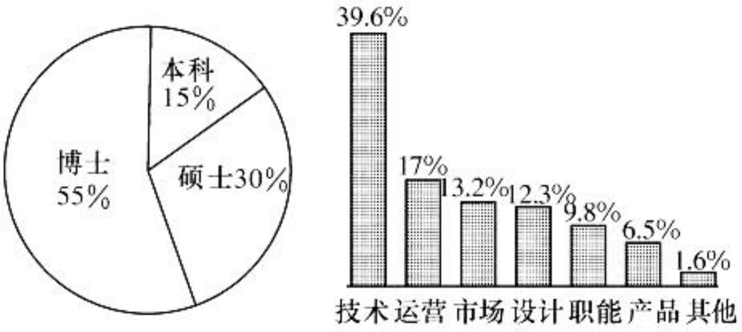
A．$b=0.25$

B．长度落在区间[93，94）内的个数为 35

C．长度的众数一定落在区间[93，94）内

D．长度的中位数一定落在区间[93，94）内

17．（2021 省实验中学二模 9）调查机构对某高科技行业进行调查统计，得到该行业从业者学历分布饼状图、从事该行业岗位分布条形图，如图所示：



则下列说法正确的是（　　）

A．该高科技行业从业人员中学历为博士的占一半以上

B．该高科技行业中从事技术岗位的人数超过总人数的 30%

C．该高科技行业中从事运营岗位的人员主要是本科生

D．该高科技行业中从事技术岗位的人员主要是博士

18．（2021 聊城三模 9）对具有相关关系的两个变量 x 和 y 进行回归分析时，经过随机抽样获得成对的样本点数据 $(x_1,y_1)(i=1,2,\dots,n)$，则下列结论正确的是（　　　）

A.　若两变量 x，y 具有线性相关关系，则回归直线至少经过一个样本点

B.　若两变量 x，y 具有线性相关关系，则回归直线一定经过样本点中心 $(\bar{x},\bar{y})$

C.　若以模型 $y=ae^{bx}$ 拟合该组数据，为了求出回归方程，设 $z=\ln y$，将其变换后得到线性方程 $z=6x+\ln 3$，则 a，b 的估计值分别是 3 和 6.

D.　用 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$ 来刻画回归模型的拟合效果时，若所有样本点都落在一条斜率为非零实数的直线上，则 R^2 的值为 1

19．（2021 淄博三模 10）下列说法正确的是（　　）

A．某高中为了解在校学生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法从该校三个年级的学生中抽取一个容量为 60 的样本，已知该校高一、高二，高三年级学生之比为 6：5：4，则应从高二年级中抽取 20 名学生

B．线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 对应的直线至少经过其样本数据点中的一个点

C．命题“$\forall x>0$，$lg(x^2+1)\geq 0$”的否定是“$\exists x>0$，$lg(x^2+1)<0$”

D．方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小，方差越大，数据的离散程度越大，方差越小，数据的离散程度越小

20．（2021 日照三模 9）下列说法正确的是（　　）

A．线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 对应的直线至少经过其样本数据点中的一个点

B．10 件产品中有 7 件正品，3 件次品，从中任取 2 件，恰好取到 1 件次品的概率为$\frac{7}{15}$　C．某高中为了解在校学生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法从该校三个年级的学生中抽取一个容量为 60 的样本，已知该校高一、高二、高三年级学生之比为 6：5：4．则应从高二年级中抽取 20 名学生

D．从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，“至少有一个黑球”与“至少有一个红球”是互斥而不对立的事件

21.（2021 青岛三模 9）某鱼业养殖场新进 1000 尾鱼苗，测量其体长（单位：毫米），将所得数据分成 6 组，其分组及频数情况如表：

分组（单位：毫米）	[70，75）	[75，80）	[80，85）	[85，90）	[90，95）	[95，100）
频数	100	100	m	350	150	n

已知在按以上 6 个分组做出的频率分布直方图中，[95，100）分组对应小矩形的高为 0.01，则下列说法正确的是（　　）

A．m=250

B．鱼苗体长在[90，100）上的频率为 0.16

C．鱼苗体长的中位数一定落在区间[85，90）内

D．从这批鱼苗中有放回地连续抽取 50 次，每次一条，则所抽取鱼苗体长落在区间[80，90）上的次数的期望为 30

22.（2021 滨州二模 9）为庆祝建党 100 周年，讴歌中华民族实现伟大复兴的奋斗历程，增进全体党员干部职工对党史知识的了解，某单位组织开展党史知识竞赛活动，以支部为单位参加比赛，某支部在 5 道党史题中（有 3 道选择题和 2 道填空题），不放回地依次随机抽取 2 道题作答，设事件 A 为“第 1 次抽到选择题”，事件 B 为“第 2 次抽到选择题”，则下列结论中正确的是（　　）

A．$P(A)=\frac{3}{5}$　　B．$P(AB)=\frac{3}{10}$　　C．$P(B|A)=\frac{1}{2}$　　D．$P(B|\overline{A})=\frac{1}{2}$

23.（2021 烟台三模 11）中华人民共和国第十四届运动会将于 2021 年 9 月在陕西省举办．为了组建一支朝气蓬勃、训练有素的赛会志愿者队伍，向全国人民奉献一场精彩圆满的体育盛会，第十四届全国运动会组织委员会欲从 4 名男志愿者，3 名女志愿者中随机抽取 3 人聘为志愿者队的队长．下列说法正确的有（　　）

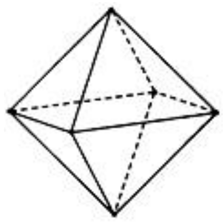
A．设事件 A：“抽取的三人中既有男志愿者，也有女志愿者”，则 $P(A)=\frac{6}{7}$

B．设事件 A：“抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”，事件 B：“抽取的 3 人中全是男志愿者”，则 $P(B|A)=\dfrac{2}{17}$

C．用 X 表示抽取的三人中女志愿者的人数，则 $E(X)=\dfrac{12}{7}$

D．用 Y 表示抽取的三人中男志愿者的人数，则 $D(Y)=\dfrac{24}{49}$

24.（2021 潍坊二模 12）连接正方体每个面的中心构成一个正八面体，甲随机选择此正八面体的三个顶点构成三角形，乙随机选择此正八面体三个面的中心构成三角形，且甲、乙的选择互不影响，则（　　）



A．甲选择的三个点构成正三角形的概率为$\dfrac{2}{5}$

B．甲选择的三个点构成等腰直角三角形的概率为$\dfrac{3}{5}$

C．乙选择的三个点构成正三角形的概率为$\dfrac{3}{7}$

D．甲选择的三个点构成的三角形与乙选择的三个点构成的三角形相似的概率为$\dfrac{11}{35}$

三、填空题

25.（2021 枣庄二模 13）已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图 1 和图 2 所示，为了解该地区中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方法抽取 2%的学生进行调查，则抽取的高中生中近视人数为_______.

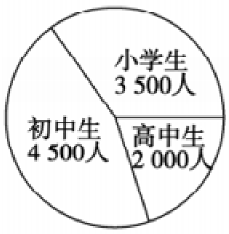


图1

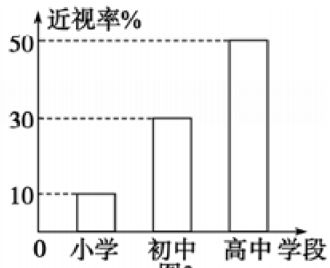


图2

26.（2021 潍坊三模 13）在一次期中考试中某学校高三全部学生　数学成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若 $P(X\geq 90)=0.5$，且 $P(X\geq 110)=0.2$，则 $P(X\leq 70)=$________.

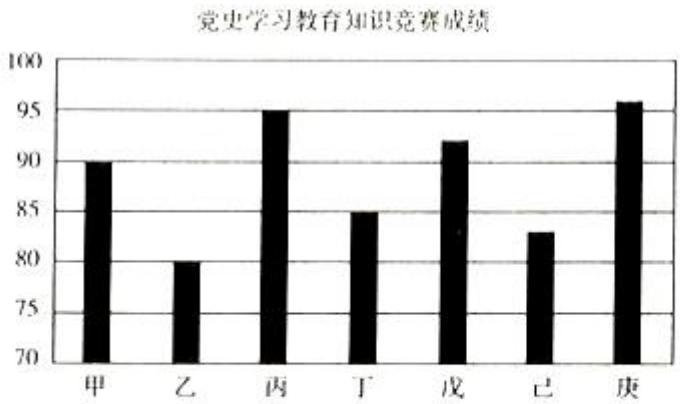
27.（2021 青岛三模 13）某机械厂对一台自动化机床生产的标准零件尺寸进行统计发现，零件尺寸误差 X 近似服从正态分布 $N(0, 0.5^2)$（误差单位：mm），已知尺寸误差的绝对值在 0.5mm 内的零件都是合格零件．若该机床在某一天共生产了 5000 个零件，则其中合格的零件总数为_________.

附：随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9544$.

28.（2021 烟台适应性练习一 13）某企业加工了一批新零件，其综合质量指标值 X 服从正态分布 $N(80, \sigma^2)$，且 $P(X<60)=0.2$，现从中随机抽取该零件 500 个，估计综合质量指标值位于[60，100]的零件个数为_______.

29.（2021 德州二模 13）若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X>5)=P(X<-1)=0.2$，则 $P(-1<X<2)=$ ________.

30.（2021 济南二模 14）习近平总书记在党史学习教育动员大会上强调：“回望过往的奋斗路，眺望前方的奋进路，必须把党的历史学习好、总结好，把党的成功经验传承好、发扬好．”某党小组为响应习总书记号召，重温百年奋斗的恢弘史诗，以信仰之光照亮前行之路，组织开展党史学习教育知识竞赛活动，其中 7 名党员在这次活动中的成绩统计如图所示．则这 7 个成绩的中位数所对应的党员是______.



31.（2021 淄博二模 14）某班 40 名学生，在一次考试中统计所得平均分为 80 分，方差为 70，后来发现有两名同学的成绩有损，甲实得 80 分错记为 60 分，乙实得 70 分错记为 90 分，则更正后的方差为________.

32.（2021 临沂二模 15）随机变量 X 的分布列如表：

X	1	2	3
P	a	b	c

其中 a，b，c 成等差数列，若 $E(X)=\frac{5}{2}$，则 $D(X)=$______.

33.（2021 菏泽二模 14）某射击运动员每次击中目标的概率为$\frac{4}{5}$，现连续射击两次.

（1）已知第一次击中，则第二次击中的概率是 _________ ；

（2）在仅击中一次的条件下，第二次击中的概率是 _________ .

34.（2021 枣庄二模 16）2020 年 11 月 23 日国务院扶贫办确定的全国 832 个贫困县全部脱贫摘帽，脱贫攻坚取得重大突破．为了使扶贫工作继续推向深入，2021 年某原贫困县对家庭状况较困难的农民实行购买农资优惠政策.

（1）若购买农资不超过 2 000 元，则不给予优惠；

（2）若购买农资超过 2 000 元但不超过 5 000 元，则按原价给予 9 折优惠；

（3）若购买农资超过 5 000 元，不超过 5 000 元的部分按原价给予 9 折优惠，超过 5 000 元的部分按原价给予 7 折优惠.

该县家境较困难的一户农民预购买一批农资，有如下两种方案：

方案一：分两次付款购买，实际付款分别为 3 150 元和 4 850 元；

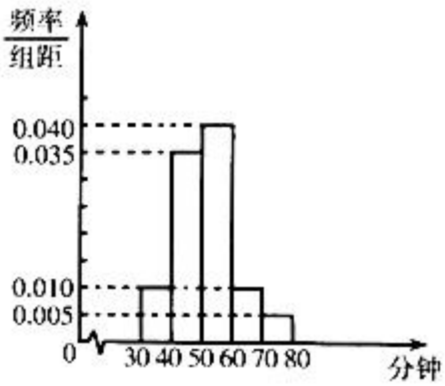
方案二：一次性付款购买．

若采取方案二购买这批农资，则比方案一节省_______元．

35．（2021 淄博三模 16）如图，在 3×3 的点阵中，依次随机地选出 A，B，C 三个点，则选出的三点满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$ 的概率是 _________．

四、解答题

36．（2021 潍坊二模 17）某校为了解学生每天的校内体育锻炼情况，随机选取了 100 名学生进行调查，其中男生有 60 人．下面是根据调查结果绘制的学生日均校内体育锻炼时间（单位：分钟）的频率分布直方图．将日均校内体育锻炼时间在[60，80]内的学生评价为“锻炼时间达标”，已知样本中“锻炼时间达标”的学生中有 5 名女生．



（1）若该校共有 2000 名学生，请估计该校“锻炼时间达标”的学生人数；

（2）根据样本数据完成下面的 2×2 列联表，并据此判断是否有 90%的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关？

是否达标 性别	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男			
女			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.10	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

37.（2021 济宁二模 19）甲、乙两人进行“抗击新冠疫情”知识竞赛，比赛采取五局三胜制，约定先胜三局者获胜，比赛结束．假设在每局比赛中，甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，各局比赛相互独立．

（1）求甲获胜的概率；

（2）设比赛结束时甲和乙共进行了 X 局比赛，求随机变景 X 的分布列及数学期望．

38.（2021 滨州二模 19）为落实中央“坚持五育并举，全面发展素质教育，强化体育锻炼”的精神，某高中学校鼓励学生自发组织各项体育比赛活动，甲、乙两名同学利用课余时间进行乒乓球比赛，规定：每一局比赛中获胜方记 1 分，失败方记 0 分，没有平局，首先获得 5 分者获胜，比赛结束. 假设每局比赛甲获胜的概率都是 $\frac{3}{5}$.

（1）求比赛结束时恰好打了 6 局的概率；

（2）若甲以 3：1 的比分领先时，记 X 表示到结束比赛时还需要比赛的局数，求 X 的分布列及期望.

39.（2021 日照二模 18）青少年身体健康事关国家民族的未来，某校为了增强学生体质，在课后延时服务中增设 800 米跑活动，据统计，该校 800 米跑优秀率为 3%，为试验某种训练方式，校方决定，从 800 米跑未达优秀的学生中选取 10 人进行训练，试验方案为：若这 10 人中至少有 2 人达到优秀，则认为该训练方式有效；否则，则认为该训练方式无效.

（1）如果训练结束后有 5 人 800 米跑达到优秀，校方欲从参加该次试验的 10 人中随机选 2 人了解训练的情况，记抽到 800 米跑达到优秀的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（2）如果该训练方式将该校 800 米跑优秀率提高到了 50%，求通过试验该训练方式被认定无效的概率 p，并根据 p 的值解释该试验方案的合理性.

（参考结论：通常认为发生概率小于 5%的事件可视为小概率事件）

40.（2021 烟台三模 20）为纪念中国共产党成立 100 周年，加深青少年对党的历史、党的知识、党的理论和路线方针的认识，激发爱党爱国热情，坚定走新时代中国特色社会主义道路的信心，某校举办了党史知识竞赛．竞赛规则是：两人一组，每一轮竞赛中，小组两人分别答 3 道题，若答对题目不少于 5 道题，则获得一个积分．已知甲乙两名同学一组，甲同学和乙同学对每道题答对的概率分别是 p_1 和 p_2，且每道题答对与否互不影响．

（1）若 $p_1=\dfrac{4}{5}$，$p_2=\dfrac{3}{4}$，求甲乙同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率；

（2）若 $p_1+p_2=\dfrac{4}{3}$，且每轮比赛互不影响，若甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，那么理论上至少要进行多少轮竞赛？

41.（2021 淄博三模 19）某电台举办有奖知识竞答比赛，选手答题规则相同．甲每道题自己有把握独立答对的概率为$\frac{1}{2}$，若甲自己没有把握答对，则在规定时间内连线亲友团寻求帮助，其亲友团每道题能答对的概率为 p，假设每道题答对与否互不影响．

（Ⅰ）当 $p=\frac{1}{5}$时，

（ⅰ）若甲答对了某道题，求该题是甲自己答对的概率；

（ⅱ）甲答了 4 道题，计甲答对题目的个数为随机变量 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望 EX；

（Ⅱ）乙答对每道题的概率为$\frac{2}{3}$（含亲友团），现甲乙两人各答两个问题，若甲答对题目的个数比乙答对题目的个数多的概率不低于$\frac{15}{36}$，求甲的亲友团每道题答对的概率 p 的最小值．

42.（2021 聊城三模 20）2021 年 3 月 5 日李克强总即在政府作报告中特别指出：扎实做好碳达峰，碳中和各项工作，制定 2030 年前碳排放达峰行动方案，优化产业结构和能源结构．某环保机器制造商为响应号召，对一次购买 2 台机器的客户推出了两种超过机器保修期后 5 年内的延保维修方案：

方案一：交纳延保金 5000 元，在延保的 5 年内可免费维修 2 次，超过 2 次每次收取维修费 1000 元；

方案二：交纳延保金 6230 元，在延保的 5 和内可免费维修 4 次，超过 4 次每次收取维修费 t 元；

制造商为制定的收取标准，为此搜集并整理了 200 台这种机器超过保修期后 5 年内维修的次数，统计得到下表

维修次数	0	1	2	3
机器台数	20	40	80	60

以这 200 台机器维修次数的频率代替 1 台机器维修次数发生的概率，记 X 表示 2 台机器超过保修期后 5 年内共需维修的次数．

（1）求 X 的分布列；

（2）以所需延保金与维修费用之和的均值为决策依据，为使选择方案二对客户更合算，应把 t 定在什么范围？

43.（2021 青岛三模 19）一场科普知识竞答比赛由笔试和抢答两部分组成，若笔试和抢答满分均为 100 分，其中 5 名选手的成绩如表所示：

选手	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
笔试（x 分）	87	90	91	92	95
抢答（y 分）	86	89	89	92	94

对于这 5 名选手，根据表中的数据，试解答下列两个小题：

（1）求 y 关于 x 的线性回归方程；

（2）现要从笔试成绩在 90 分或 90 分以上的选手中选出 2 名参加一项活动，以 ξ 表示选中的选手中笔试和抢答成绩的平均分高于 90 分的人数，求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 E（ξ）.

附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

44.（2021 菏泽二模 20）“十四五”是我国全面建成小康社会、实现第一个百年奋斗目标之后，乘势而上开启全面建设社会主现代化国家新征程、向第二个百年奋斗目标进军的第一个五年，实施时间为 2021 年到 2025 年. 某企业为响应国家号召，汇聚科研力量，加强科技创新，准备加大研发资金投入，为了解年研发资金投入额 x（单位:亿元）对年盈利额 y（单位:亿元）的影响，通过对“十二五”和“十三五”规划发展 10 年期间年研发资金投入额 x_i 和年盈利额 y_i（$i=1，2，\cdots，10$）数据进行分析，建立了两个函数模型:

$y=\alpha+\beta x^2$；$y=e^{\lambda x+t}$，其中 α，β，λ，t 均为常数，e 为自然对数的底数

令 $u_i=x_i^2, v_i=\ln y_i$（$i=1，2，\cdots，10$），经计算得如下数据:

$\overline{x}=26$，$\overline{y}=215$，$\overline{u}=680$，$\overline{v}=5.36$

$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2=100$，$\sum\limits_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})^2=22500$，$\sum\limits_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})=260$，

$\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2=4$，$\sum\limits_{i=1}^{10}(v_i-\overline{v})^2=4$，$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})=18$，问:

（1）请从相关系数的角度，分析哪一个模型拟合度更好?

（2）根据（1）的选择及表中数据，建立，y 关于 x 的回归方程（系数精确到 0.01）

（3）若希望 2021 年盈利额 y 为 500 亿元，请预测 2021 年的研发资金投入额 x 为多少亿元?（结果精确到 0.01）

附:①相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$

回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中:$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$　参考数据:$ln2\approx0.693$，$ln5\approx1.609$.

45.（2021 省实验中学二模 20）每年的 4 月 23 日是世界读书日，设立的目的是推动更多的人去阅读和写作，享受阅读带来的乐趣．某高校为了解在校学生的每周阅读时间 X（单位：小时），对全校学生进行了问卷调查．从中随机抽取了 100 名学生的数据，统计如表：

每周阅读时间 X	[9，11）	[11，13）	[13，15）	[15，17）	[17，19）	[19，21）	[21，23]
频率	0.05	0.1	0.15	0.4	0.2	0.06	0.04

（1）根据频率分布表，估计这 100 名学生每周阅读时间的平均值 $\overline{X}$（同一组数据用该组数据区间的中点值表示）；

（2）若认为目前该校学生每周的阅读时间 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用（1）中的平均值 $\overline{X}$ 近似代替 μ，且 $P(14\leqslant X\leqslant 17.76)=0.5$，若某学生周阅读时间不低于 14 小时，该同学可获得“阅读之星”称号．学校制定如下奖励方案：“阅读之星”可以获赠 2 次随机购书卡，其他同学可以获赠 1 次随机购书卡．每次获赠的随机购书卡的金额和对应的概率为：

购书卡的金额（单位：元）	20	50
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

记 Y（单位：元）为甲同学参加问卷调查获赠的购书卡的金额，求 Y 的分布列与数学期望．

46.（2021 潍坊四县 5 月联考 19）为了了解扬州市高中生周末运动时间，随机调查了 3000 名学生，统计了他们的周末运动时间，制成如下的频率分布表：

周末运动时间 t（分钟）	[30，40）	[40，50）	[50，60）	[60，70）	[70，80）	[80，90）
人数	300	600	900	450	450	300

（1）从周末运动时间在[70，80）的学生中抽取 3 人，在[80，90]的学生中抽取 2 人，现从这 5 人中随机推荐 2 人参加体能测试，记推荐的 2 人中来自[70，80）的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）由频率分布表可认为：周末运动时间 t 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 为周末运动时间的平均数$\bar{t}$，σ 近似为样本的标准差 s，并已求得 $s\approx14.6$．可以用该样本的频率估计总体的概率，现从扬州市所有高中生中随机抽取 10 名学生，记周末运动时间在（43.9，87.7]之外的人数为 Y，求 $P(Y=2)$（精确到 0.001）；

参考数据 1：当 $t\sim N(\mu, \sigma^2)$时，$P(\mu-\sigma<t<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<t<\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<t<\mu+3\sigma)=0.9973$.

参考数据 2：$0.8186^8\approx0.202$，$0.1814^2\approx0.033$.

47.（2021 日照三模 21）已知某高校共有 10000 名学生，其图书馆阅览室共有 994 个座位，假设学生是否去自习是相互独立的，且每个学生在每天的晚自习时间去阅览室自习的概率均为 0.1.

（1）将每天的晚自习时间去阅览室自习的学生人数记为 X，求 X 的期望和方差；

（2）18 世纪 30 年代，数学家棣莫弗发现，如果随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$，那么当 n 比较大时，可视为 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 任意正态分布都可变换为标准正态分布（$\mu=0$ 且 $\sigma=1$ 的正态分布），如果随机变量 $Y\sim N(\mu, \sigma^2)$，那么令 $Z=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，则可以证明 $Z\sim N(0, 1)$. 当 $Z\sim N(0, 1)$ 时，对于任意实数 a，记 $\Phi(a)=P(Z<a)$.

已知如表为标准正态分布表（节选），该表用于查询标准正态分布对应的概率值. 例如当 $a=0.16$ 时，由于 $0.16=0.1+0.06$，则先在表的最左列找到数字 0.1（位于第三行），然后在表的最上行找到数字 0.06（位于第八列），则表中位于第三行第八列的数字 0.5636 便是 $\Phi(0.16)$ 的值.

（i）求在晚自习时间阅览室座位不够用的概率；

（ii）若要使在晚自习时间阅览室座位够用的概率高于 0.7，则至少需要添加多少个座位？

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5834	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6404	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

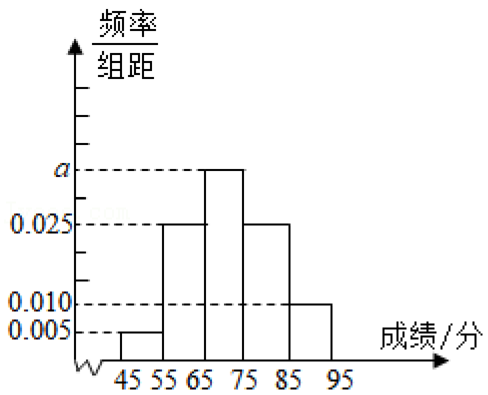
48.（2021 临沂二模 18）2021 年是“十四五”规划开局之年，也是建党 100 周年．为了传承红色基因，某学校开展了“学党史，担使命”的知识竞赛．现从参赛的所有学生中，随机抽取 100 人的成绩作为样本，得到成绩的频率分布直方图，如图．

（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估计该校此次竞赛成绩的平均分$\overline{x}$（同一组中的数据用该组区间中点值代表）；

（2）在该样本中，若采用分层抽样的方法，从成绩高于 75 分的学生中随机抽取 7 人查看他们的答题情况，再从这 7 人中随机抽取 3 人进行调查分析，求这 3 人中至少有 1 人成绩在[85，95]内的概率；

（3）假设竞赛成绩服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，已知样本数据的方差为 121，用平均分$\overline{x}$作为 μ 的近似值，用样本标准差 s 作为σ的估计值，求该校本次竞赛的及格率（60 分及以上为及格）．

参考数据：$P(\mu-\sigma<\xi\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$．



49.（2021 聊城二模 19）2020 年是全面建成小康社会之年，是脱贫攻坚收官之年．上坝村是乡扶贫办的科学养鱼示范村，为了调查上坝村科技扶贫成果，乡扶贫办调查组从该村办鱼塘内随机捕捞两次，上午进行第一次捕捞，捕捞到 60 条鱼，共 105kg，称重后计算得出这 60 条鱼质量（单位 kg）的平方和为 200.41，下午进行第二次捕捞，捕捞到 40 条鱼，共 66kg．称重后计算得出这 40 条鱼质量（单位 kg）的平方和为 117．

（1）请根据以上信息，求所捕捞 100 条鱼儿质量的平均数$\overline{z}$和方差 s^2；

（2）根据以往经验，可以认为该鱼塘鱼儿质量 X 服从正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$，用$\overline{z}$作为 μ 的估计值，用 s^2 作为 σ^2 的估计值．随机从该鱼塘捕捞一条鱼，其质量在[1.21，2.71]的概率是多少？

（3）某批发商从该村鱼塘购买了 5000 条鱼，若从该鱼塘随机捕捞，记 ξ 为捕捞的鱼儿质量在[1.21，2.71]的条数，利用（2）的结果，求 ξ 的数学期望．

附：（1）数据 t_1，t_2，…，t_n 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2=\frac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\overline{t}^2)$，

（2）若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$；$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$；$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9973$．

50.（2021 泰安二模 21）某新型双轴承电动机需要装配两个轴承才能正常工作，且两个轴承互不影响．现计划购置甲，乙两个品牌的轴承，两个品牌轴承的使用寿命及价格情况如表：

品牌	价格（元、件））	使用寿命（月）
甲	1000	7 或 8
乙	400	3 或 4

已知甲品牌使用 7 个月或 8 个月的概率均为$\frac{1}{2}$，乙品牌使用 3 个月或 4 个月的概率均为$\frac{1}{2}$.

（1）若从 4 件甲品牌和 2 件乙品牌共 6 件轴承中，任选 2 件装入电动机内，求电动机可工作时间不少于 4 个月的概率；

（2）现有两种购置方案，方案一：购置 2 件甲品牌；方案二：购置 1 件甲品牌和 2 件乙品牌（甲，乙两品牌轴承搭配使用）．试从性价比（即电动机正常工作时间与购置轴承的成本之比）的角度考虑，选择哪一种方案更实惠？

51.（2021 潍坊三模 20）第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在中国举行，其中冰壶比赛项目是本届奥运会的正式比赛项目之一，1998 年中国女子冰壶队第一次参加奥运会冰壶比赛就获得了铜牌．冰壶比赛的场地如图所示，其中左端（投掷线 MN 的左侧）有一个发球区，运动员在发球区边沿的投掷线 MN 将冰壶掷出，使冰壶沿冰道滑行，冰道的右端有一圆形的营垒，以场上冰壶最终静止时距离营垒区圆心 O 的远近决定胜负．

某学校冰壶队举行冰壶投掷测试，规则为：

①每人至多投 3 次，先在点 M 处投第一次，冰壶进入营垒区得 3 分，未进营垒区不得分；

②自第二次投掷开始均在点 A 处投掷冰壶，冰壶进入营垒区得 2 分，未进营垒区不得分；

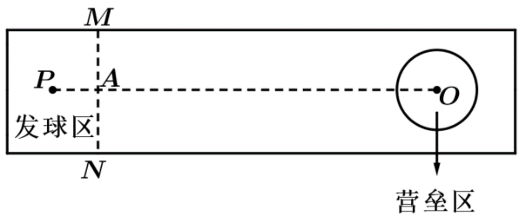
③测试者累计得分高于 3 分即通过测试，并立即终止投掷．

已知投掷一次冰壶，甲得 3 分和 2 分的概率分别为 0.1 和 0.5，乙得 3 分和 2 分的概率分别为 0.2 和 0.4，甲，乙每次投掷冰壶的结果互不影响．

（1）求甲通过测试的概率；

（2）设 Y 为本次测试中乙的得分，求 Y 的分布列；

（3）请根据测试结果来分析，甲，乙两人谁的水平较高？



52.（2021 烟台适应性练习二 20）随着时代发展和社会进步，教师职业越来越受青睐，考取教师资格证成为不少人的就业规划之一．当前，中小学教师资格考试分笔试和面试两部分．已知某市 2020 年共有 10000 名考生参加了中小学教师资格考试的笔试，现从中随机抽取 100 人的笔试成绩（满分视为 100 分）作为样本，整理得到如下频数分布表：

笔试成绩 X	[40，50）	[50，60）	[60，70）	[70，80）	[80，90）	[90，100]
人数	5	10	25	30	20	10

（1）假定笔试成绩不低于 90 分为优秀，若从上述样本中笔试成绩不低于 80 分的考生里随机抽取 2 人，求至少有 1 人笔试成绩为优秀的概率；

（2）由频数分布表可认为该市全体考生的笔试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 近似为 100 名样本考生笔试成绩的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代替），$\sigma^2=166$，据此估计该市全体考生中笔试成绩不低于 85.9 的人数（结果四舍五入精确到个位）；

（3）考生甲为提升综合素养报名参加了某拓展知识竞赛，该竞赛要回答 3 道题，前两题是哲学知识，每道题答对得 3 分，答错得 0 分；最后一题是心理学知识，答对得 4 分，答错得 0 分．已知考生甲答对前两题的概率都是 $\frac{3}{4}$，答对最后一题的概率为 $\frac{7}{10}$，且每道题答对与否相互独立，求考生甲的总得分 Y 的分布列及数学期望．

（参考数据：$\sqrt{166}\approx 12.9$；若 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$．）

53.（2021 德州二模 21）2020 年 1 月 15 日教育部制定出台了《关于在部分高校开展基础学科招生改革试点工作的意见》（也称“强基计划”），《意见》宣布：2020 年起不再组织开展高校自主招生工作，改为实行强基计划，强基计划主要选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生，据悉强基计划的校考由试点高校自主命题，校考过程中通过笔试后才能进入面试环节.

参考公式：

①线性相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)}}$ ，一般地，相关系数 r 的绝对值在 0.95 以上（含 0.95 ）认为线性相关性较强；否则，线性相关性较弱.

②对于一组数据 (x_1,y_1) ， (x_2,y_2) ，⋯ (x_n,y_n) ，其回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为： $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

（1）为了更好的服务于高三学生，某研究机构对随机抽取的 5 名高三学生的记忆力 x 和判断力 y 进行统计分析，得到下表数据

x	6	8	9	10	12
y	2	3	4	5	6

请用相关系数说明该组数据中 y 与 x 之间的关系可用线性回归模型进行拟合，并求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

（2）现有甲、乙两所大学的笔试环节都设有三门考试科目且每门科目是否通过相互独立，若某考生报考甲大学，每门笔试科目通过的概率均为 $\frac{2}{5}$ ，该考生报考乙大学，每门笔试科目通过的概率依次为 m ，$\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{3}$ ，其中 $0<m<1$ ，根据规定每名考生只能报考强基计划的一所试点高校，若以笔试过程中通过科目数的数学期望为依据作出决策，求该考生更希望通过乙大学笔试时 m 的取值范围.

54.（2021 枣庄二模 20）天问一号火星探测器于 2021 年 2 月 10 日成功被火星捕获，实现了中国在深空探测领域的技术跨越．为提升探测器健康运转的管理水平，西安卫星测控中心组织青年科技人员进行探测器遥控技能知识竞赛，已知某青年科技人员甲是否做对每个题目相互独立，做对 A，B，C 三道题目的概率以及做对时获得相应的奖金如表所示．

题目	A	B	C
做对的概率	0.8	0.6	0.4
获得的奖金/元	1 000	2 000	3 000

规则如下：按照 A，B，C 的顺序做题，只有做对当前题目才有资格做下一题．

（1）求甲获得的奖金 X 的分布列及均值；

（2）如果改变做题的顺序，获得奖金的均值是否相同？如果不同，你认为哪个顺序获得奖金的均值最大？（不需要具体计算过程，只需给出判断）

55.（2021 青岛二模 20）现对某市工薪阶层对于“楼市限购令”的态度进行调查，随机抽调了 50 人，他们月收入（单位：百元）的频数分布及对“楼市限购令”赞成人数如表：

月收入	[25，35）	[35，45）	[45，55）	[55，65）	[65，75）	[75，85）
频数	5	10	15	10	5	5
赞成人数	4	8	12	5	2	1

（1）根据以上统计数据完成下面的 2×2 列联表，并问能否有 97.5%的把握认为“某市工薪阶层对于‘楼市限购令’的态度与月收入以 6500 元为分界点有关”？

	月收入不低于 65 百元的人数	月收入低于 65 百元的人数	合计
赞成			
不赞成			
合计			

（2）若对月收入在[55，65）和[65，75）的被调查人中各随机选取两人进行追踪调查，求在选中的 4 人中有人不赞成的条件下，赞成“楼市限购令”的人数 ξ 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

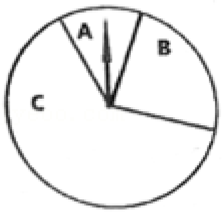
$P(K^2\geq k_0)$	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

56.（2021 烟台适应性练习一 20）如图是一个质地均匀的转盘，一向上的指针固定在圆盘中心，盘面分为 A，B，C 三个区域．每次转动转盘时，指针最终都会随机停留在 A，B，C 中的某一个区域．现有一款游戏：每局交 10 元钱随机转动上述转盘 3 次；每次转动转盘时，指针停留在区域 A，B，C 分别获得积分 10，5，0；三次转动后的总积分不超过 5 分时获奖金 2 元，超过 25 分时获奖金 50 元，其余情况获奖金 5 元．假设每次转动转盘相互独立，且指针停留在区域 A，B 的概率分别是 p 和 $2p$（$0<p<\frac{1}{6}$）．

（1）设某人在一局游戏中获得总积分为 5 的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0；

（2）以（1）中确定的 p_0 作为 p 值，某人进行了 5 局游戏，设“在一局游戏中获得的总积分不低于 5”的局数为 ξ，求 ξ 的数学期望；

（3）有人注意到：很多玩家进行了大量局数的该游戏，不但没赚到钱，反而输得越来越多．请用概率统计的相关知识给予解释．



57.（2021 淄博二模 20）某市在司法知识宣传周活动中，举办了一场司法知识网上答题考试，要求本市所有机关、企事业单位工作人员均要参加考试，试题满分为 100 分，考试成绩大于等于 90 分的为优秀．考试结束后，组织部门从所有参加考试的人员中随机抽取了 200 人的成绩作为统计样本，得到样本平均数为 82、方差为 64．假设该市机关、企事业单位工作人员有 20 万人，考试成绩 ξ 服从正态分布 $N(82,64)$ ．

（1）估计该市此次司法考试成绩优秀者的人数有多少万人？

（2）该市组织部门为调动机关、企事业单位工作人员学习司法知识的积极性，制定了如下奖励方案：所有参加考试者，均可参与网上“抽奖赢手机流量”活动，并且成绩优秀者可有两次抽奖机会，其余参加者抽奖一次．抽奖者点击抽奖按钮，即随机产生一个两位数 $(10,11,\cdots,99)$ ，若产生的两位数的数字相同，则可获赠手机流量 $5G$ ， 否则获赠手机流量 $1G$ ． 假设参加考试的所有人均参加了抽奖活动，试估计此次抽奖活动赠予的手机流量总共有多少 G?

参考数据：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.68$

58.（2021 济南二模 22）某企业对生产设备进行优化升级，升级后的设备控制系统由 $2k-1$（$k\in N_+$）个相同的元件组成，每个元件正常工作的概率均为 p（$0<p<1$），各元件之间相互独立．当控制系统有不少于 k 个元件正常工作时，设备正常运行，否则设备停止运行，记设备正常运行的概率为 p_k（例如：p_2表示控制系统由 3 个元件组成时设备正常运行的概率；p_3表示控制系统由 5 个元件组成时设备正常运行的概率）．

（1）若每个元件正常工作的概率 $p=\frac{2}{3}$．

（ⅰ）当 $k=2$ 时，求控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列和期望；

（ⅱ）计算 p_3．

（2）已知设备升级前，单位时间的产量为 a 件，每件产品的利润为 1 元，设备升级后，在正常运行状态下，单位时间的产量是原来的 4 倍，且出现了高端产品，每件产品成为高端产品的概率为$\frac{1}{4}$，每件高端产品的利润是 2 元．请用 p_k表示出设备升级后单位时间内的利润 y（单位：元），在确保控制系统中元件总数为奇数的前提下，分析该设备能否通过增加控制系统中元件的个数来提高利润．

专题十一　排列、组合、二项式定理

排列、组合

一、　单项选择题

1.（2021 德州二模 3）6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去 1 个场馆，甲场馆安排 3 名，乙场馆安排 1 名，丙场馆安排 2 名，则不同的安排方法共有（　　）.

A. 120 种　　B. 90 种　　C. 80 种　　D. 60 种

2.（2021 潍坊二模 4）2021 年是中国共产党百年华诞．某学校社团将举办庆祝中国共产党成立 100 周年革命歌曲展演．现从《歌唱祖国》《英雄赞歌》《唱支山歌给党听》《毛主席派人来》4 首独唱歌曲和《没有共产党就没有新中国》《我和我的祖国》2 首合唱歌曲中共选出 4 首歌曲安排演出，要求最后一首歌曲必须是合唱，则不同的安排方法共有（　　）

A．14　　B．48　　C．72　　D．120

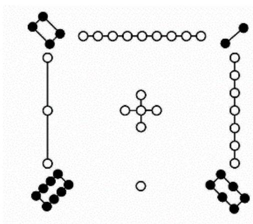
3.（2021 烟台适应性练习一 5）风雨苍黄百年路，高歌奋进新征程．时值建党 100 周年，为深入开展党史学习教育，某街道党支部决定将 4 名党员安排到 3 个社区进行专题宣讲，且每个社区至少安排 1 名党员，则不同的安排方法总数为（　　）

A．12　　B．24　　C．36　　D．72

4.（2021 潍坊四县 5 月联考 5）车马理论也称霍姆斯马车理论，是指各种资源都得到最合理配置和使用充分均匀的一种理论．管理学家经常将“霍姆斯马车理论”引申为：一架完美的马车，没有最好的部件，只有最完美、最平衡的组合．一个富有效率的团队，不需要每一个人都是最有能力的，而在于每个人的能力都能得到最合理的使用和发挥．某班一小队共 10 名同学，编号分别为 1，2，…，9，10，要均分成两个学习小组（学习小组没有区别），其中 1，2 号同学必须组合在一起，3，4 号同学也必须组合在一起，其余同学可以随意搭配，就能达到最佳效果，那么一共有多少种不同的分组方式（　　）

A．26　　B．46　　C．52　　D．126

5.（2021 菏泽二模 3）如图，洛书（古称龟书）是阴阳五行术数之源，在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上有此图象，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数. 若从四个阴数和五个阳数中随机选取 3 个数，则选取的 3 个数之和为奇数的方法数为(　　)



A. 30　　*B*. 40　　*C*. 42　　*D*. 44

6.（2021 省实验中学二模 7）两个三口之家（父母+小孩）共 6 人去旅游，有红旗和吉利两辆车，每辆车至少乘坐 2 人，但两个小孩不能单独乘坐一辆车，则不同的乘车方式的种数为（　　）

A．48　　B．50　　C．98　　D．68

7.（2021 日照三模 6）2020 年是全面建成小康社会的目标实现之年，也是全面打赢脱贫攻坚战的收官之年．为更好地将“精准扶贫”落到实处，某地安排 7 名干部（3 男 4 女）到三个贫困村调研走访，每个村安排男、女干部各 1 名，剩下 1 名干部负责统筹协调，则不同的安排方案有（　　）

A．72 种　　B．108 种　　C．144 种　　D．210 种

8.（2021 滨州二模 8）2020 年是实施脱贫攻坚的最后一年，某地区针对最后深度贫困的 A，B，C，D，E 五个自然村引入五个脱贫项目（其中林果，茶园，养殖，旅游，农业特色深加工各一个项目）进行对口帮扶，不同的村安排不同的项目，且每个村只安排一个项目．由于自然村条件限制，A，B 两个村无法实施农业特色深加工项目，C 村无法实施养殖项目，D，E 两个村可以实施任何项目，则符合条件的不同安排方式共有（　　）

A．48 种　　B．54 种　　C．60 种　　D．72 种

三、填空题

9.（2021 临沂二模 14）现有标号为①，②，③，④，⑤的 5 件不同新产品，要放到三个不同的机构进行测试，每件产品只能放到一个机构里．机构 A，B 各负责一个产品，机构 C 负责余下的三个产品，其中产品①不在 A 机构测试的情况有________种（结果用具体数字表示）．

二项式定理

一、单项选择题

1.（2021 济南二模 2）$(x+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，含 x^4 项的系数为（　　）

A．4　　B．6　　C．10　　D．15

2.（2021 烟台适应性练习二 3）$(1-2\sqrt{x})^8$ 展开式中 x 项的系数为（　　）

A．28　　B．－28　　C．112　　D．－112

3.（2021 烟台三模 3）在 $\left(x^2+2x+y\right)^5$ 展开式中，x^5y^2 的系数为（　　）

A．60　　B．30　　C．15　　D．12

4.（2021 日照二模 5）$(x-1)(x-2)^6$ 的展开式中的 x^3 的系数为（　　）

A．80　　B．－80　　C．400　　D．－400

5.（2021 泰安二模 7）$(\sqrt{2}x-y)^8$的展开式中，x^2y^6项的系数是（　　）

A．28　　B．－28　　C．56　　D．－56

6.（2021 菏泽二模 7）已知正整数 $n\geq7$，若$(x-\frac{1}{x})(1-x)^n$的展开式中不含 x^5的项，则 n 的值为(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

7.（2021 枣庄二模 1）6．若 $x^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+\cdots+a_6(x+1)^6$，则 $a_3=$

A．20　　B．－20　　C．15　　D．－15

8.（2021 潍坊三模 8）定义：两个正整数 a，b，若它们除以正整数 m 所得的余数相等，则称 a，b 对模 m 同余，记作 $a\equiv b(\bmod m)$，比如：$26\equiv16(\bmod 10)$．已知 $n=C_{10}^0+C_{10}^1\cdot8+C_{10}^2\cdot8^2+\cdots+C_{10}^{10}\cdot8^{10}$，满足 $n\equiv p(\bmod 10)$，则 p 可以是（　　）

A．23　　B．21　　C．19　　D．17

三、填空题

9.（2021 临沂二模 13）$(x-\frac{1}{3\sqrt{x}})^6$的展开式中常数项为_____.（用数字表示）

10.（2021 济宁二模 13）已知 $(x-\frac{2}{x})^n$ 的展开式中各项的二项式系数的和为 128，则这个展开式中 x^3 项的系数是________.

11.（2021 青岛三模 1）15．若$(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中所有二项式系数之和为 64，则展开式的常数项为_______.

12.（2021 潍坊二模 13）设$(x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=$_______.

13.（2021 德州二模 14）若 $n\in Z$，且 $3\leq n\leq6$，则 $(x+\frac{1}{x^3})^n$ 的展开式中的常数项为________.

14.（2021 聊城二模 1）13．$(a+\frac{1}{x})(x-\frac{2}{x})^6$的展开式中各项系数的和为 3，那么展开式中的常数项为_________.

15.（2021 淄博二模 15）已知 $(1+x)^m+(1+3x)^n(m,n\in N^*)$ 展开式中 x 的系数为 11，当 x^2 的系数取最小值时，x^4 的系数是________.

16.（2021 青岛二模 15）若$(3-2x)^{2021}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2021}x^{2021}$，则 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2021a_{2021}=$_________.

专题十二　数学文化

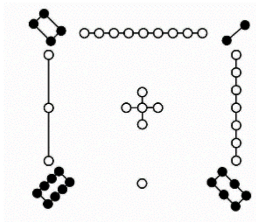
一、单项选择题

1.（2021 临沂二模 1）某校积极落实立德树人，坚持五育并举，计划在新学期开展球类、书法、健美操、棋类等四项社团活动．学校要求每位学生选择其中的两项，学生甲、乙，丙三人都已决定选择球类，三人再从其它三项中各选择一项，恰好三人的选择互不相同，乙比选棋类的人个头高，丙和选书法的人身高不同，选书法的人比甲个头小，则甲、乙，丙所选的第二项社团活动分别为（　　）

A．书法、健美操、棋类　　B．健美操、书法、棋类

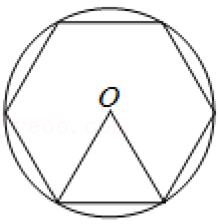
C．棋类、书法、健美操　　D．棋类、健美操、书法

2.（2021 菏泽二模 3）如图，洛书（古称龟书）是阴阳五行术数之源，在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上有此图象，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数.若从四个阴数和五个阳数中随机选取 3 个数，则选取的 3 个数之和为奇数的方法数为(　　)



A. 30　　*B*. 40　　*C*. 42　　*D*. 44

3.（2021 青岛二模 4）我国魏晋时期著名的数学家刘徽在《九章算术注》中提出了“割圆术－－割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体而无所失矣”．也就是利用圆的内接多边形逐步逼近圆的方法来近似计算圆的面积．如图⊙O的半径为 1，用圆的内接正六边形近似估计，则⊙O的面积近似为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，若我们运用割圆术的思想进一步得到圆的内接正二十四边形，以此估计，⊙O的面积近似为（　　）



A．$\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$　　B．$\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$　　C．$3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$　　D．$3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

4.（2021 潍坊二模 5）尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家通过研究已经对地震有所了解，地震时释放出的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $lgE=4.8+1.5M$. 2011 年 3 月 11 日，日本东北部海域发生里氏 9.0 级地震，它所释放出来的能量大约是 2008 年 5 月 12 日我国汶川发生里氏 8.0 级地震所释放能量的少倍？（参考数值：$\sqrt{10}\approx3.162$，$\sqrt[3]{10}\approx2.154$）（　　）

A．31.6　　B．15.8　　C．4.6　　D．1.5

5.（2021 日照二模 4）尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家通过研究已经对地震有所了解，例如，

地震释放出的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系 $lgE=4.8+1.5M$. 据此推断 2008 年 5 月 12 日我国四川省汶川地区发生里氏 8.0 级地震所释放的能量是 2020 年 9 月 30 日台湾省宜兰县海域发生里氏 5.0 级地震所释放的能量的（　　）倍

A．$lg4.5$　　B．4.5　　C．450　　D．$10^{4.5}$

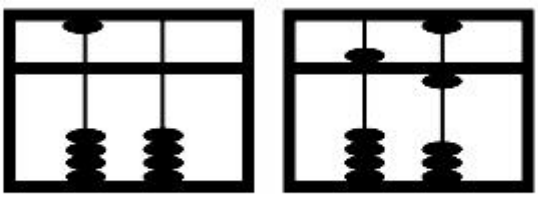
6.（2021 聊城三模 5）声强级 L_I（单位：dB）由公式 $L_I=10\lg(\frac{I}{10^{-12}})$ 给出，其中 I 为声强（单位：W/m^2）一般正常人听觉能忍受的最高声强级为 120dB，平时常人交谈时声强级约为 60dB，那么一般正常人能忍受的最高声强是平时常人交谈时声强的（　　　）

A．10^4 倍　　B．10^5　　C．10^6 倍　　D．10^7 倍

7.（2021 聊城二模 7）中医药在抗击新冠肺炎疫情中发挥了重要作用，但由于中药材长期的过度开采，本来蕴藏丰富的中药材量在不断减少．研究发现，t 期中药材资源的再生量 $f(x_t)=rx_t(1-\frac{x_t}{N})$，其中 x_t 为 t 期中药材资源的存量，r，N 为正常数，而 t 期中药资源的利用量与存量的比为采挖强度．当 t 期的再生量达到最大，且利用量等于最大再生量时，中药材资源的采挖强度为（　　）

A．$\frac{r}{2}$　　B．$\frac{r}{3}$　　C．$\frac{r}{4}$　　D．$\frac{r}{5}$

8.（2021 淄博三模 7）算盘是一种手动操作计算辅助工具．它起源于中国，迄今已有 2600 多年的历史，是中国古代的一项重要发明，算盘有很多种类现有一种算盘（如图一），共两挡，自右向左分别表示个位和十位，档中横以梁，梁上一珠拨下，记作数字 5，梁下四珠，上拨每珠记作数字 1（例如图二中算盘表示整数 51）．如果拨动图一算盘中的三枚算珠，可以表示不同整数的个数为（　　）



图一　　图二

A．16　　B．15　　C．12　　D．10

9.（2021 日照三模 5）2020 年 12 月 17 日凌晨，嫦娥五号返回器携带月球土壤样品，在预定区域安全着陆．嫦娥五号是使用长征五号火箭发射成功的，在不考虑空气阻力的情况下，火箭的最大速度 v（单位：米/秒）和燃料的质量 M（单位：千克）、火箭（除燃料外）的质量 m（单位：千克）的函数关系表达式为 $v=2000ln(1+\frac{M}{m})$. 如果火箭的最大速度达到 12000 米/秒，则燃料的质量与火箭的质量的关系是(　　)

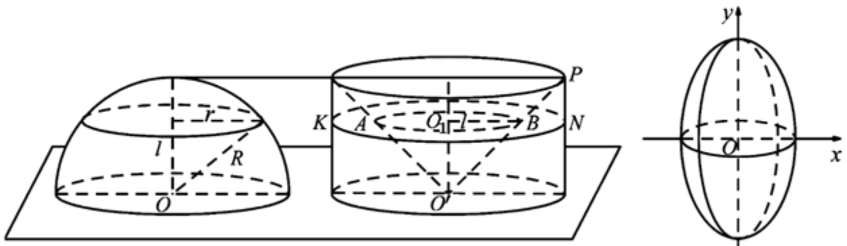
A. $M=e^6m$　　B. $Mm=e^6-1$　　C. $\ln M+\ln m=6$　　D. $\frac{M}{m}=e^6-1$

10. （2021 济南二模 7）苏格兰数学家纳皮尔发明了对数表，这一发明为当时天文学家处理“大数运算”提供了巨大的便利．已知正整数 N 的 31 次方是一个 35 位数，则由下面的对数表，可得 N 的值为（　　）

M	2	3	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17
$\lg M$	0.30	0.48	0.78	0.85	0.90	0.95	1.04	1.08	1.11	1.15	1.18	1.20	1.23

A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15

11. （2021 德州二模 7）运用祖暅原理计算球的体积时，夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意一个平面所截，若截面面积都相等，则这两个几何体的体积相等，构造一个底面半径和高都与球的半径相等的圆柱，与半球（如图①）放置在同一平面上，然后在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点，圆柱上底面为底面的圆锥后得到一新几何体（如图②），用任何一个平行于底面的平面去截它们时，可证得所截得的两个截面面积相等，由此可证明新几何体与半球体积相等．现将椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴旋转一周后得一橄榄状的几何体（如图③），类比上述方法，运用祖暅原理可求得其体积等于（　　　）．



图①　　图②　　图③

A. 8π　　B. 16π　　C. 24π　　D. 32π

8. （2021 淄博二模 8）碳 70（C_{70}）是一种碳原子族，可高效杀灭癌细胞，它是由 70 个碳原子构成的，其结构是由五元环（正五边形面）和六元环（正六边形面）组成的封闭的凸多面体，共 37 个面，则其六元环的个数为（　　　）．

A. 12　　B. 25

C. 30　　D. 36


C_{70}分子结构图

二、多项选择题

9.（2021 潍坊四县 5 月联考 9）甲、乙、丙、丁四人参加数学竞赛，四人在成绩公布前作出如下预测：

甲预测说：我不会获奖，丙获奖；

乙预测说：甲和丁中有一人获奖；

丙预测说：甲的猜测是对的；

丁预测说：获奖者在甲、乙、丙三人中．

成绩公布后表明，四人的预测中有两人的预测与结果相符，另外两人的预测与结果不符，已知有两人获奖，则获奖者可能是（　　）

A．甲和乙　　B．乙和丙　　C．甲和丙　　D．乙和丁

10.（2021 日照二模 10）我国天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度），二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始．已知每年冬至的晷长为一丈三尺五寸，夏至的晷长为一尺五寸（一丈等于十尺，一尺等于十寸），则下列说法正确的是（　　）

A．小寒比大寒的晷长长一尺

B．春分和秋分两个节气的晷长相同

C．小雪的晷长为一丈五寸

D．立春的晷长比立秋的晷长长

11.（2021 枣庄二模 11）列昂纳多•斐波那契(Leonardo Fibonacci，1170—1250 年)是意大利数学家，1202 年斐波那契在其代表作《算盘书》中提出了著名的“兔子问题”，于是得斐波那契数列，斐波那契数列可以如下递推的方式定义：用 $F(n)(n\in N^*)$ 表示斐波那契数列的第 n 项，则数列 $\{F(n)\}$ 满足：$F(1)=F(2)=1$，$F(n+2)=F(n+1)+F(n)$．斐波那契数列在生活中有着广泛的应用，美国 13 岁男孩 Aidan Dwyer 观察到树枝分叉的分布模式类似斐波那契数列，因此猜想可按其排列太阳能电池，找到了能够大幅改良太阳能科技的方法．苹果公司的 Logo 设计，电影《达芬奇密码》等，均有斐波那契数列的影子．下列选项正确的是

A．$[F(8)]^2=F(7)F(9)+1$

B．$F(1)+F(2)+\cdots+F(6)+1=F(8)$

C．$F(2)+F(4)+\cdots+F(2n)=F(2n+1)-2$

D．$[F(1)]^2+[F(2)]^2+\cdots+[F(n)]^2=F(n)\cdot F(n+1)$

12.（2021 日照三模 11）意大利画家列奥纳多•达•芬奇（1452.4－1519.5）的画作《抱银貂的女人》中，女士脖颈上黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽，达•芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数解析式：$f(x)=a\cosh\frac{x}{a}$，其中 a 为悬链线系数，$\cosh x$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，相应地双曲正弦函数的表达式为 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$．若直线 $x=m$ 与双曲余弦函数 C_1 与双曲正弦函数 C_2 的图象分别相交于点 A，B，曲线 C_1 在点 A 处的切线 l_1 与曲线 C_2 在点 B 处的切线 l_2 相交于点 P，则下列结论正确的为（　　）

A．$\cosh(x-y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

B．$y=\sinh x\cosh x$ 是偶函数

C．$(\cosh x)'=\sinh x$

D．若△PAB 是以 A 为直角顶点的直角三角形，则实数 $m=0$

三、填空题

13.（2021 省实验中学二模 15）任取一个正整数 m，若 m 是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若 m 是偶数，就将该数除以 2．反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 1→4→2→1，这就是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”等），若 $m=5$，则经过______次步骤后变成 1；若第 5 次步骤后变成 1，则 m 的可能值之和为_____．

14.（2021 潍坊三模 1）16．阿基米德在他的著作《论圆和圆柱》中，证明了数学史上著名的圆柱容球定理：圆柱的内切球（与圆柱的两底面及侧面都相切的球）的体积与圆柱的体积之比等于它们的表面积之比．可证明该定理推广到圆锥容球也正确，即圆锥的内切球（与圆锥的底面及侧面都相切的球）的体积与圆锥体积之比等于它们的表面积之比，则该比值的最大值为________．