

姓名_____ 座位号_____

(在此卷上答题无效)

绝密 ★ 启用前

2021 届“江南十校”一模联考

数学(理科)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, 集合 $B = \{x | 4 < x \leq 7\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(6, 7]$ B. $(4, 7]$
C. $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ D. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

2. 已知复数 $z = 1 + i$, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 若 $\bar{z} \cdot a = 2 + bi$, 其中 a, b 均为实数, 则 b 的值为

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

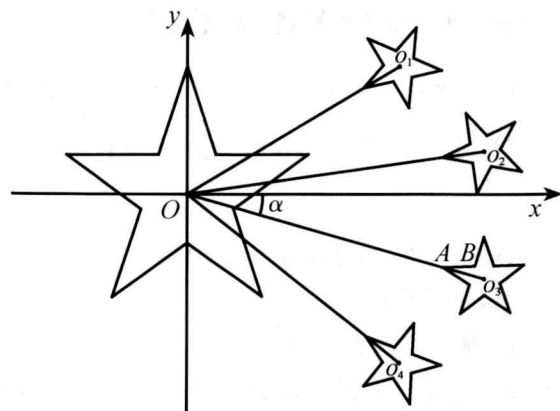
3. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\tan 2\alpha =$

- A. $-\frac{24}{7}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $\frac{24}{7}$

4. 2020 年 12 月 4 日, 嫦娥五号探测器在月球

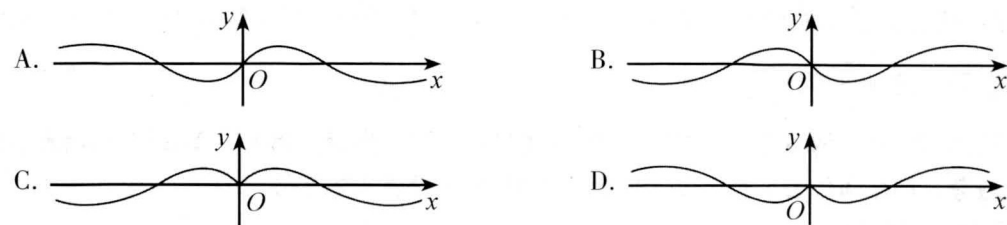
表面第一次动态展示国旗。1949 年公布的《国旗制法说明》中就五星的位置规定: 大五角星有一个角尖正向上方, 四颗小五角星均各有一个角尖正对大五角星的中心点。有人发现, 第三颗小星的姿态与大星相近。为便于研究, 如图, 以大星的中心点为原点, 建立直角坐标系, OO_1, OO_2, OO_3, OO_4 分别是大星中心点与四颗小星中心点的联结线, $\alpha \approx 16^\circ$, 则第三颗小星的一条边 AB 所在直线的倾斜角约为

- A. 0° B. 1° C. 2° D. 3°



数学(理科)试题 第 1 页(共 4 页)

5. 函数 $f(x) = \frac{x \cos x}{2^{|x|}}$ 的图象大致为



6. 已知 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, P 为椭圆 C 上一点, 若 $|OP| = |OF|$, $\angle POF = 120^\circ$, 则椭圆 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{3} - 1$

7. 现有 5 名志愿者被分配到 3 个不同巡查点进行防汛抗洪志愿活动, 要求每人只能去一个巡查点, 每个巡查点至少有一人, 则不同分配方案的总数为

- A. 120 B. 150 C. 240 D. 300

8. 将数列 $\{3n - 1\}$ 与 $\{2^n + 1\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的第 10 项为

- A. $2^{10} - 1$ B. $2^{10} + 1$ C. $2^{20} - 1$ D. $2^{20} + 1$

9. 已知函数 $f(x) = e^{|\ln x|}$, $a = f(1)$, $b = f(\log_2 \sqrt{3})$, $c = f(2^{1.2})$, 则

- A. $b > c > a$ B. $c > b > a$ C. $c > a > b$ D. $b > a > c$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = c \sin B$, 则 $\tan A$ 的最大值为

- A. 1 B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, P, M, N 分别为 DD_1, AB, BC 的中点, 则四面体 $OPMN$ 的体积为

- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

12. 已知函数 $f(x) = e \log_a x - a^{\frac{x}{e}}$ ($a > 1$) 没有零点, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(e, +\infty)$ B. $(\sqrt{e}, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(e^{\frac{1}{e}}, +\infty)$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上周期为 2 的函数, 当 $x \in (-1, 1]$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + m, & -1 < x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \text{ 其中 } m \in \mathbf{R}. \text{ 若 } f(\frac{1}{16}) = f(\frac{3}{2}), \text{ 则 } m \text{ 的值是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 已知非零向量 a, b 满足 $|a + b| = |a - b|$, 且 $|a| = |b|$, 则 a 和 $a + b$ 的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = PB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$, 若

$\triangle PBC$ 和 $\triangle PCD$ 的面积分别为 1 和 $\sqrt{3}$, 则四棱锥 $P - ABCD$ 的外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

数学(理科)试题 第 2 页(共 4 页)

16. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 作倾斜角为 60° 的直线 l 交双曲线右支于 A, B 两点 (A 在 x 轴上方), 则 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径 r_1 与 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆半径 r_2 之比 $\frac{r_1}{r_2}$ 为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

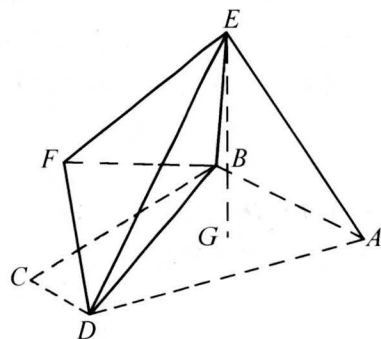
已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1, S_n = a_{n+1} - 1$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $2b_{n+1} + S_{n+1} = 2b_n + 2a_n$, 证明数列 $\{a_n + b_n\}$ 为等差数列, 并求其公差.

18. (12 分)

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD, BC = CD = \sqrt{2}$, 且 $BC \perp CD$. 以 BD 为折痕把 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 向上折起, 使点 A 到达点 E 的位置, 点 C 到达点 F 的位置 (E, F 不重合).

- (1) 求证: $EF \perp BD$;
- (2) 若平面 $EBD \perp$ 平面 FBD , 点 E 在平面 $ABCD$ 内的正投影 G 为 $\triangle ABD$ 的重心, 且直线 EF 与平面 FBD 所成角为 60° , 求二面角 $A - BE - D$ 的余弦值.



19. (12 分)

为了调查某地区全体高中生的身高信息 (单位: cm), 从该地区随机抽取高中学生 100 人, 其中男生 60 人, 女生 40 人. 调查得到样本数据 $x_i (i = 1, 2, \dots, 60)$ 和 $y_j (j = 1, 2, \dots, 40)$, x_i 和 y_j 分别表示第 i 个男生和第 j 个女生的身高. 经计算得 $\sum_{i=1}^{60} x_i = 10500$, $\sum_{i=1}^{60} x_i^2 = 1838400$,

$\sum_{j=1}^{40} y_j = 6600$, $\sum_{j=1}^{40} y_j^2 = 1090200$.

- (1) 请根据以上信息, 估算出该地区高中学生身高的平均数 $\bar{z}$ 和方差 s^2 ;
- (2) 根据以往经验, 可以认为该地区高中学生身高 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 用 $\bar{z}$ 作为 μ 的估计值, 用 s^2 作为 σ^2 的估计值. 若从该地区高中学生中随机抽取 4 人, 记 ξ 表示抽取的 4 人中身高在 $(171, 184.4)$ 的人数, 求 ξ 的数学期望.

附: (1) 数据 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 的方差 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2)$,

(2) 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$;

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$; $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$; $\sqrt{45} \approx 6.7$.

20. (12 分)

已知动圆 P 与 x 轴相切且与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ 相外切, 圆心 P 在 x 轴的上方, P 点的轨迹为曲线 C .

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 已知 $E(4, 2)$, 过点 $(0, 4)$ 作直线交曲线 C 于 A, B 两点, 分别以 A, B 为切点作曲线 C 的切线相交于 D , 当 $\triangle ABE$ 的面积 S_1 与 $\triangle ABD$ 的面积 S_2 之比 $\frac{S_1}{S_2}$ 取最大值时, 求直线 AB 的方程.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2e^x + a \ln(x + 1) - 2$.

- (1) 当 $a = -2$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq \sin x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $[k - 1 + 3 \sin^k(\frac{k\pi}{4} + \theta)] \rho^k = 4$.

(1) 当 $k = 1$ 时, 求 C_1 和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 当 $k = 2$ 时, C_1 与 C_2 交于 A, B 两点, 设 P 的直角坐标为 $(0, 1)$, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$.

- (1) 解不等式 $f(x) > x + 2$;
- (2) 记 $f(x)$ 的最小值为 m , 正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = m$,

证明: $\sqrt{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

姓名_____ 座位号_____

(在此卷上答题无效)

绝密 ★ 启用前

2021 届“江南十校”一模联考

数学(文科)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, 集合 $B = \{x | 4 < x \leq 7\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(6, 7]$ B. $(4, 7]$
C. $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ D. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

2. 已知复数 $z = 1 + i$, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 若 $\bar{z} \cdot a = 2 + bi$, 其中 a, b 均为实数, 则 b 的值为

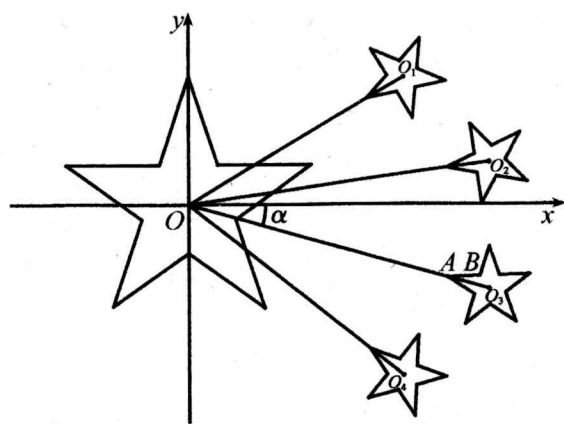
- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

3. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\tan 2\alpha =$

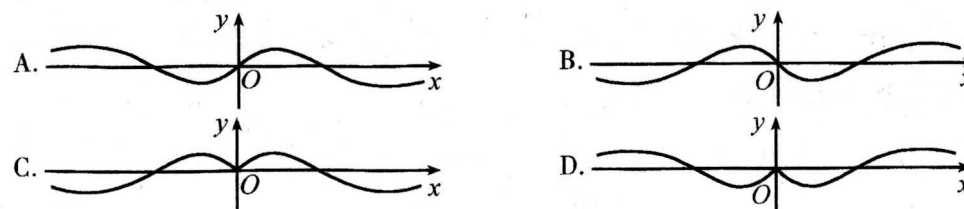
- A. $-\frac{24}{7}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $\frac{24}{7}$

4. 2020 年 12 月 4 日,嫦娥五号探测器在月球表面第一次动态展示国旗。1949 年公布的《国旗制法说明》中就五星的位置规定:大五角星有一个角尖正向上方,四颗小五角星均各有一个角尖正对大五角星的中心点。有人发现,第三颗小星的姿态与大星相近。为便于研究,如图,以大星的中心点为原点,建立直角坐标系, OO_1, OO_2, OO_3, OO_4 分别是大星中心点与四颗小星中心点的联结线, $\alpha \approx 16^\circ$, 则第三颗小星的一条边 AB 所在直线的倾斜角约为

- A. 0° B. 1° C. 2° D. 3°



5. 函数 $f(x) = \frac{x \cos x}{2^{|x|}}$ 的图象大致为



6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与椭圆交于 M, N 两点, 若 $\triangle MNF_2$ 的周长为 8, 则 $\triangle MF_1F_2$ 面积的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 3

7. 设 a, b 为两条直线, 则 $a \parallel b$ 的充要条件是

- A. a, b 与同一个平面所成角相等 B. a, b 垂直于同一条直线
C. a, b 平行于同一个平面 D. a, b 垂直于同一个平面

8. 若直线 $y = kx$ 与曲线 $(x - \sqrt{3})^2 + (|y| - 1)^2 = 1$ 有交点, 则 k 的取值范围是

- A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

9. 将数列 $\{3^{n+1}\}$ 与 $\{9^{n-1}\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $a_{10} =$

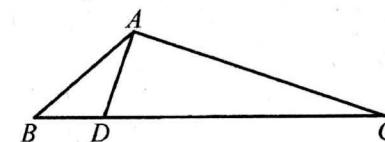
- A. 3^{19} B. 3^{20} C. 3^{21} D. 3^{22}

10. 已知函数 $f(x) = e^{|\ln x|}$, 记 $a = f(1), b = f(\frac{2}{3}), c = f(2)$, 则

- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, 点 D 在线段 BC 上, $AD \perp AC$, $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{4}$, 则 $\sin C =$

- A. $\frac{\sqrt{7}}{14}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$
C. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$



12. 当 $x > 1$ 时, 函数 $y = (\ln x)^2 + a \ln x + 1$ 的图象在直线 $y = x$ 的下方, 则实数 a 的取值范围是

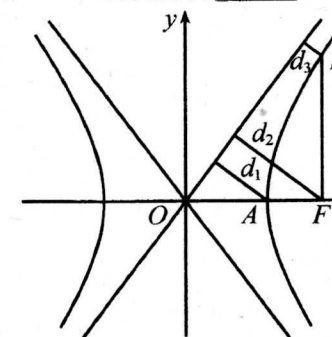
- A. $(-\infty, e)$ B. $(-\infty, \frac{e^2 - 5}{2})$ C. $(-\infty, \frac{4\sqrt{e} - 5}{2})$ D. $(-\infty, e - 2)$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

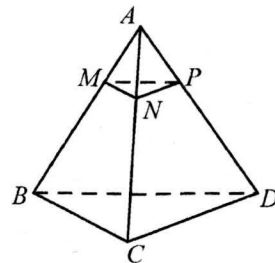
13. 已知函数 $f(x) = \tan(\omega x + \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $\omega =$ _____.

14. 已知非零向量 a, b 满足 $|a + b| = |a - b|$, 且 $|a| = |b|$, 则 a 和 $a + b$ 的夹角为 _____.

15. 如图, A, F 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1 (a > 0)$ 的右顶点和右焦点, 过 F 作 x 轴的垂线交双曲线于 H , 且 H 在第一象限, A, F, H 到同一条渐近线的距离分别为 d_1, d_2, d_3 , 且 d_1 是 d_2 和 d_3 的等差中项, 则 C 的离心率为 _____.



16. 如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle BCD$ 是边长为 1 的等边三角形, $AB=AC=AD=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, 点 M, N, P 分别在棱 AB, AC, AD 上, 平面 $MNP \parallel$ 平面 BCD , 若 $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$, 则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球被平面 MNP 所截的截面面积为_____.

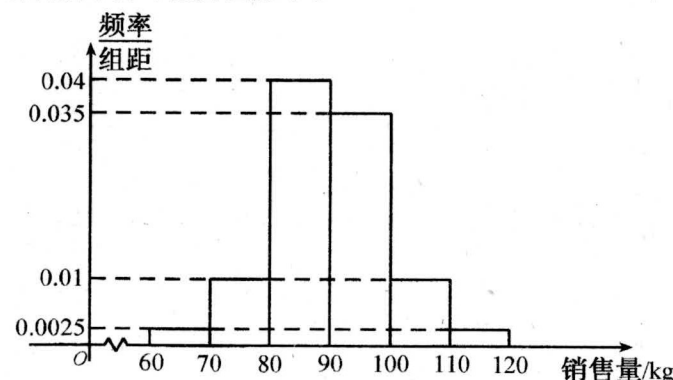


三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一) 必考题:共 60 分。

17. (12 分)

某家水果店的店长为了解本店苹果的日销售情况,记录了近期连续 120 天苹果的日销售量(单位:kg),并绘制频率分布直方图如下:



- 请根据频率分布直方图估计该水果店苹果日销售量的众数和平均数;(同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表)
- 一次进货太多,水果会变得不新鲜;进货太少,又不能满足顾客的需求. 店长希望每天的苹果尽量新鲜,又能 80% 地满足顾客的需求(在 10 天中,大约有 8 天可以满足顾客的需求). 请问每天应该进多少千克苹果?(精确到整数位)

18. (12 分)

已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2(a_{n+1} + a_n)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

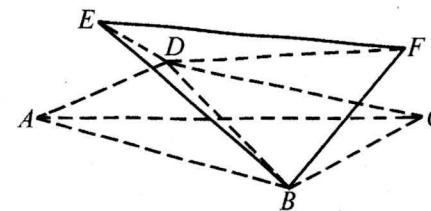
(2) 记 $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12 分)

已知菱形 $ABCD$ 边长为 1, $AC = \sqrt{3}$, 以 BD 为折痕把 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 折起, 使点 A 到达点 E 的位置, 点 C 到达点 F 的位置, E, F 不重合.

(1) 求证: $BD \perp EF$;

(2) 若 $EF = \frac{3}{2}$, 求点 B 到平面 DEF 的距离.



20. (12 分)

已知函数 $f(x) = a^x - ax$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 当 $a = e$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最值;

(2) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 零点的个数.

21. (12 分)

已知动圆 P 与 x 轴相切且与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ 相外切, 圆心 P 在 x 轴的上方, P 点的轨迹为曲线 C .

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 $E(4, 2)$, 过点 $(0, 4)$ 作直线交曲线 C 于 A, B 两点, 分别以 A, B 为切点作曲线 C 的切线相交于 D , 当 $\triangle ABE$ 的面积 S_1 与 $\triangle ABD$ 的面积 S_2 之比 $\frac{S_1}{S_2}$ 取最大值时, 求直线 AB 的方程.

(二) 选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $[k - 1 + 3 \sin(\frac{k\pi}{4} + \theta)] \rho^k = 4$.

(1) 当 $k = 1$ 时, 求 C_1 和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 当 $k = 2$ 时, 曲线 C_1 与 C_2 交于 A, B 两点, 设 P 的直角坐标为 $(0, 1)$, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. [选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$.

(1) 解不等式 $f(x) > x + 2$;

(2) 记 $f(x)$ 的最小值为 m , 正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = m$,

证明: $\sqrt{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.