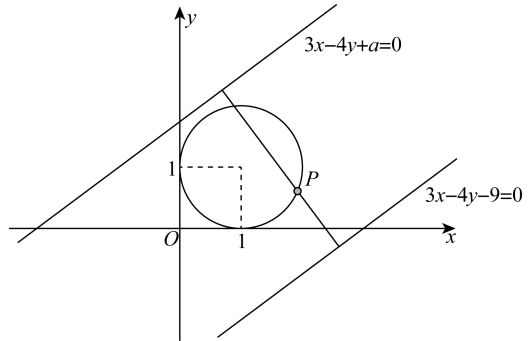


数学(一)

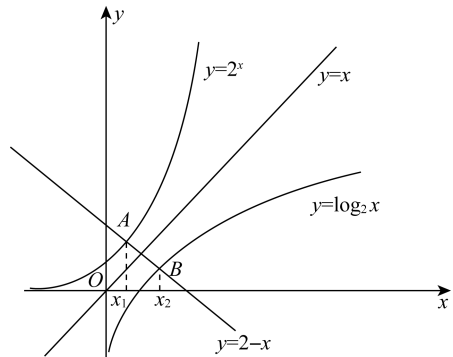
一、选择题

1. D 【解析】 $z = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{(1+i)(1-i)} = 2(1+i)$, 所以 $|z-i| = |2+i| = \sqrt{5}$. 故选 D.
2. D 【解析】 因为 $A \cap B = A$, 所以 $A \subseteq B$, 因为 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, 所以 $B \neq \emptyset$, 所以 $m \geq 0$, 所以 $B = \{x | y = \sqrt{m-x^2}\} = \{x | -\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}\}$, 所以 $\sqrt{m} \geq 2$, 解得 $m \geq 4$. 故选 D.
3. B 【解析】 设圆柱形容器的底面圆半径为 r , 则 $r = \frac{54}{2\pi} = \frac{54}{6} \approx 9$ 尺, 所以该圆柱形容器的体积 $V = \pi r^2 \times 18 \approx 3 \times 9^2 \times 18 = 4\,374$ 立方尺, 因此该圆柱形容器大约能放米 $\frac{4\,374}{1.62} = 2\,700$ 斛. 故选 B.
4. B 【解析】 散点图呈曲线, A 错误; 且增长速度变慢, C, D 错误. 故选 B.
5. B 【解析】 $y = x \ln x$, 所以 $y' = 1 + \ln x$, $y'|_{x=e} = 1 + \ln e = 2$, 所以在点 $M(e, e)$ 处的切线方程为 $y = 2(x - e) + e = 2x - e$. 故选 B.
6. B 【解析】 由题意 $(1-x)(1+x)^3 = (1+x)^3 - x(1+x)^3$, $(1+x)^3$ 的二项展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_3^r \cdot 1^{3-r} \cdot x^r = C_3^r \cdot x^r$, 令 $r = 3$, 则 $C_3^r = C_3^3 = 1$; 令 $r = 2$, 则 $C_3^r = C_3^2 = 3$; 所以 $(1-x)(1+x)^3$ 的展开式中, x^3 的系数为 $1 - 3 = -2$. 故选 B.
7. C 【解析】 由 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\alpha$, 得 $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$, 即 $\frac{1 + \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2} = 1 - \sin^2 2\alpha$, 解得 $\sin 2\alpha = -1$ 或 $\frac{1}{2}$. 故选 C.
8. D 【解析】 依题意 $|3x - 4y + a| + |3x - 4y - 9| = 5\left(\frac{|3x - 4y + a|}{5} + \frac{|3x - 4y - 9|}{5}\right)$ 表示 $P(x, y)$ 到两条平行直线 $3x - 4y + a = 0$ 和 $3x - 4y - 9 = 0$ 的距离之和的 5 倍, 若取值与 x, y 无关, 则两条平行直线 $3x - 4y + a = 0$ 和 $3x - 4y - 9 = 0$ 在圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的两侧, 画出图像如下图所示, 故圆心 $(1, 1)$ 到直线 $3x - 4y + a = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 - 4 + a|}{5} \geq 1$ 且 $a > 1$, 解得 $a \geq 6$ 或 $a \leq -4$ (舍去). 故选 D.



二、选择题

9. AC 【解析】 设 M 的横坐标为 x , 由题意知 $x + \frac{p}{2} = 3$, $2px = 8$, 解得 $p = 2$ 或 $p = 4$. 故选 AC.
10. BD 【解析】 由图像可得 $A = \frac{1}{2}$, $\frac{3T}{4} = \frac{11}{12} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$, 解得 $T = 1$, 所以 $\omega = 2\pi$, 所以 $f(x) = \frac{1}{2} \cos(2\pi x + \varphi)$, 又 $f(x)$ 的图像过点 $\left(\frac{11}{12}, \frac{1}{2}\right)$, 则 $2\pi \times \frac{11}{12} + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\varphi = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 即 $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(2\pi x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{1}{2} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$. 故选 BD.
11. CD 【解析】 6 门中选 3 门共有 $C_6^3 = 20$ 种, A 错误; 课程“射”“御”排在不相邻两周, 共有 $A_4^4 A_2^2 = 480$ 种排法, B 错误; 课程“礼”“书”“数”排在相邻三周, 共有 $A_3^3 A_4^1 = 144$ 种排法, C 正确; 课程“乐”不排在第一周, 课程“御”不排在最后一周, 共有 $A_5^5 + C_4^1 C_4^1 A_4^4 = 504$ 种排法, D 正确. 故选 CD.
12. AC 【解析】 易知 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 是增函数且 $x_3 = 1$, 作出 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = 2 - x$ 三个函数的图像如图所示:



其中 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 分别是两个函数 $y = 2^x$ 与

$y = \log_2 x$ 的图像与直线 $y = 2 - x$ 的交点, 因为指数函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 且 $y = 2 - x$ 也关于 $y = x$ 对称, 所以交点 A, B 关于直线 $y = x$ 对称, 所以 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$, 即 $2 - x_1 + 2 - x_2 = x_1 + x_2$, 所以 $x_1 + x_2 = 2 = 2x_3$, 再由基本不等式得 $x_1 x_2 < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = 1 = x_3 (0 < x_1 < x_2)$. 故选 AC.

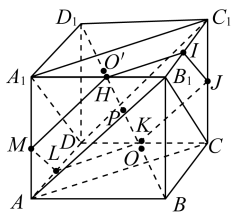
三、填空题

13. 1 或 -2 【解析】令 $\begin{cases} a > 0, \\ 2^a + 2 = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 = 4, \end{cases}$ 解得 $a = 1$ 或 $a = -2$.

14. -1 【解析】向量 a, b 满足 $|b| = 5, |a + b| = 4, |a - b| = 6$, 可得 $(a + b)^2 = 16, (a - b)^2 = 36$, 即为 $a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 16, a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 36$, 两式相减可得 $a \cdot b = -5$, 则向量 a 在向量 b 方向上的投影为 $\frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{-5}{5} = -1$.

15. $\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 【解析】若渐近线的方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 则点 P 的坐标为 $\left(\frac{a^2}{b}, a\right)$, 因为 $|PA_2| = \frac{\sqrt{5}}{2} |A_1 A_2|$, 所以 $\left(\frac{a^2}{b} - a\right)^2 + a^2 = 5a^2$, 则 $\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 = 4$, 所以 $\frac{a}{b} = 3$, 从而 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. 若渐近线的方程为 $y = -\frac{b}{a}x$, 则点 P 的坐标为 $\left(-\frac{a^2}{b}, a\right)$, 同理可得 $e = \sqrt{2}$.

16. $\{3\sqrt{2}a\}$ 【解析】如图所示, 当 $x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{2\sqrt{3}}{3}a\right]$ 时, 截面多边形是六边形 $HIJKLM$,



设 $\frac{HI}{A_1 C_1} = \frac{B_1 I}{B_1 C_1} = \lambda$, 则 $\frac{IJ}{B_1 C} = \frac{C_1 I}{B_1 C_1} = 1 - \lambda$, 所以 $HI + IJ = \sqrt{2}a$, 所以截面六边形的周长为 $3\sqrt{2}a$.

四、解答题

17. 解: (1) 若选①:

由正弦定理得 $\frac{a-c}{b} = \frac{a-b}{a+c}$,

所以 $a^2 - c^2 = ab - b^2$,

由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

解得 $\cos C = \frac{1}{2}$,

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$. (5 分)

若选②:

由正弦定理得 $\sin A \cos B + \sin B \cos A = 2 \sin C \cos C$, 即 $\sin(A+B) = 2 \sin C \cos C$,

即 $\sin C = 2 \sin C \cos C$,

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos C = \frac{1}{2}$,

所以 $C = \frac{\pi}{3}$. (5 分)

(2) 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

得 $5 = a^2 + b^2 - ab$,

即 $5 = (a+b)^2 - 3ab$, 解得 $ab = 2$,

则 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (10 分)

18. 解: (1) 由题得 $S_n - S_{n-1} = \left[\frac{2(n-1)a_n}{n} + 2 \right] - \left[\frac{2(n-2)a_{n-1}}{n-1} + 2 \right] = a_n, n \geq 2$,

整理得 $\frac{(n-2)a_n}{n} = \frac{2(n-2)a_{n-1}}{n-1}, n \geq 2$. (3 分)

因为 $S_1 = a_1 = 2, a_2 = 8$,

所以当 $n = 2$ 时, $\frac{a_2}{2} = 2 \cdot \frac{a_1}{1}$,

当 $n > 2$ 时, $\frac{a_n}{n} = \frac{2a_{n-1}}{n-1}$,

所以当 $n \geq 2$ 时, 有 $\frac{a_n}{n} = 2 \cdot \frac{a_{n-1}}{n-1}$,

因此 $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列. (5 分)

所以 $\frac{a_n}{n} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$,

所以 $a_n = n \cdot 2^n$. (6 分)

(2) 由 (1) 知 $b_n = (2n-1)2^n$,

则 $T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-1)2^n$, ①

① $\times 2$, 得 $2T_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (2n-3)2^n + (2n-1)2^{n+1}$, ② (8 分)

② - ①, 得 $T_n = -2 - 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) + (2n-1)2^{n+1}$

$$\begin{aligned} &= -2 - 2 \times \frac{4(1-2^{n-1})}{1-2} + (2n-1)2^{n+1} \\ &= -2 + 8 - 2^{n+2} + (2n-1)2^{n+1} \\ &= 6 + (2n-3)2^{n+1}. \end{aligned} \quad (12 \text{ 分})$$

19. (1) 证明: 因为平面 $ABCD$ 垂直于半圆 O 所在的平面, 两平面的交线为 $AB, BC \subset$ 平面 $ABCD, BC \perp AB$,

所以 BC 垂直于半圆 O 所在的平面. (2 分)

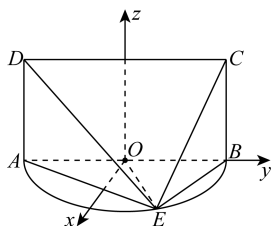
又 EA 在半圆 O 所在的平面内,

所以 $BC \perp EA$, 因为 $\angle AEB$ 是直角, 所以 $BE \perp EA$,

又 $BC \cap BE = B$, 所以 $EA \perp$ 平面 EBC , (4 分)

因为 $EC \subset$ 平面 EBC , 所以 $EA \perp EC$. (5 分)

(2) 解: 如图, 以点 O 为坐标原点, AB 所在的直线为 y 轴, 过点 O 作与 BC 平行的直线为 z 轴, 过点 O 在圆 O 所在平面内作与 AB 垂直的直线为 x 轴, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$.



由异面直线 AE 和 DC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, $AB \parallel DC$,

知 $\angle BAE = \frac{\pi}{6}$, 连接 OE , 所以 $\angle BOE = \frac{\pi}{3}$,

所以 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$,

由题设可知 $D(0, -1, 1)$, $C(0, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{DE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$, $\overrightarrow{CE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

设平面 DCE 的一个法向量为 $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{p} = 0, \\ \overrightarrow{CE} \cdot \mathbf{p} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 + \frac{3}{2}y_0 - z_0 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 - \frac{1}{2}y_0 - z_0 = 0, \end{cases}$$

得 $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_0$, $y_0 = 0$, 取 $x_0 = 2$, 得 $z_0 = \sqrt{3}$,

所以 $\mathbf{p} = (2, 0, \sqrt{3})$. (9 分)

又平面 AEB 的一个法向量为 $\mathbf{q} = (0, 0, 1)$, (10 分)

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{p}| |\mathbf{q}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

平面 DCE 与平面 AEB 所成的锐二面角的余弦值为

$$\frac{\sqrt{21}}{7}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. 解: (1) 设至少回答对一个问题为事件 A ,

$$\text{则 } P(A) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{18}. \quad (3 \text{ 分})$$

(2) 这位挑战者回答这三个问题的总得分 X 的所有可能取值为 $-10, 0, 10, 20, 30, 40$.

$$\text{根据题意, } P(X = -10) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18},$$

$$P(X = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{9},$$

$$P(X = 10) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9},$$

$$P(X = 20) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18},$$

$$P(X = 30) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{9},$$

$$P(X = 40) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}.$$

这位挑战者回答这三个问题的总得分 X 的分布列为

X	-10	0	10	20	30	40
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

(9 分)

(3) 设这位挑战者闯关成功为事件 B ,

$$\text{则 } P(B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{18} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18}. \quad (12 \text{ 分})$$

21. 解: (1) 由 $\overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_2} = \mathbf{0}$, 可知 A, B, F_2 三点共线, 且 $AB \perp x$ 轴. (2 分)

由 $\triangle ABF_1$ 的周长为 8, 得 $4a = 8$, 所以 $a = 2$, 且 $b = \sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (4 分)

(2) 显然直线 l 斜率存在且不为 0, 设直线 $l: y = kx + t$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + t, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases}$$

$$\text{得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0,$$

$$\text{且 } \Delta = 64k^2t^2 - 4(3 + 4k^2)(4t^2 - 12) = 0,$$

$$\text{得 } t^2 = 4k^2 + 3,$$

$$\text{所以 } x_M = \frac{-8kt}{2(3 + 4k^2)} = -\frac{4k}{t}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}x, \\ y = kx + t, \end{cases} \text{ 得 } x_P = -\frac{kt}{k^2 + 1},$$

$$\text{所以 } |OP| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot \frac{|kt|}{k^2 + 1} = \frac{|t|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{则 } |MP| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \left| -\frac{4k}{t} + \frac{kt}{k^2 + 1} \right| = \sqrt{1 + k^2} \cdot$$

$$\left| \frac{-4k^3 - 4k + kt^2}{t(k^2 + 1)} \right| = \frac{|k|}{|t| \cdot \sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OMP} = \frac{1}{2} |MP| \cdot |OP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|k|}{|t| \cdot \sqrt{k^2 + 1}} \cdot$$

$$\frac{|t|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|k|}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|k| + \frac{1}{|k|}} \leq \frac{1}{4}, \text{ 当且仅当 } k = \pm 1 \text{ 时取等号.}$$

$$\text{所以 } \triangle OMP \text{ 的面积的最大值为 } \frac{1}{4}. \quad (12 \text{ 分})$$

22. (1) 证明: 因为 $f'(x) = e^x - \frac{x}{2} - 1$,

记 $h(x) = f'(x)$, 所以 $h'(x) = e^x - \frac{1}{2}$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立,

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增,

所以 $h(x) > h(0) = 0$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增. (4 分)

(2) 解: 由 (1) 知 $h'(x) = e^x - \frac{1}{2}$,

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = -\ln 2$,

当 $x \in (-\infty, -\ln 2)$ 时, $h'(x) < 0$, 即 $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (-\ln 2, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, 即 $h(x)$ 单调递增.

又 $h(-1) < 0, h(-2) > 0$,

所以在区间 $(-2, -1)$ 内, $h(x)$ 存在唯一零点 x_0 ,

满足 $h(x_0) = 0$, 即 $f'(x_0) = 0$. (7 分)

当 $x \in (-\infty, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 内单调递增;

当 $x \in (x_0, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, 0)$ 内单调递减,

所以当 $x < 0$ 时, $f(x)_{\max} = f(x_0) = e^{x_0} - \frac{x_0^2}{4} - x_0$.

由 $f'(x_0) = 0$, 可得 $e^{x_0} = \frac{x_0}{2} + 1$, (9 分)

所以 $f(x)_{\max} = -\frac{x_0^2}{4} - \frac{x_0}{2} + 1$,

由 $x_0 \in (-2, -1)$, 可得 $f(x)_{\max} \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$,

因为 $f(x) < a$ 恒成立, 且 $a \in \mathbf{Z}$,

所以整数 a 的最小值为 2. (12 分)